RICERCA OPERATIVA

Problema dello zaino

Dati n oggetti di valore $v_1, \dots, v_n$ e peso $p_1, \dots, p_n$ ed un contenitore di capacità C, quali oggetti inserisco nel contenitore, rispettando la sua capacità, in modo da massimizzare il valore attuale?

Variabili $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto } j \text{ viene inserito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Modello:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq C \\ x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Bin Packing

Dati n oggetti di peso $p_1, \dots, p_n$ e m contenitori ognuno di capacità C, trovare il minimo numero di contenitori in cui inserire tutti gli oggetti

Variabili $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ inserito contenitore } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Modello:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \leq C y_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \\ y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \end{cases}$$

Distribuzione di lavori

Variabili: t = tempo necessario per eseguire tutti i lavori

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ è eseguito dalla macchina } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \min t \\ \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \le t & \forall j = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & \forall i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Selezione di sottoinsiemi

Copertura

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum a_{ij} x_j \ge 1 & \forall i \\ x_j \in \{0,1\} & \forall j \end{cases}$$

Partizione

$$\begin{cases} \min \sum c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 & \forall i \\ x_j \in \{0,1\} & \forall j \end{cases}$$

Riempimento

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum a_{ij} x_j \le 1 & \forall i \\ x_j \in \{0,1\} & \forall j \end{cases}$$

Cammini minimi

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x \ge 0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -(n-1) & \text{se } i = r \\ 1 & \text{se } i \ne r \end{cases}$$

Condizioni di ottimalità: Sia T_r un albero di copertura orientato di radice r e π il vettore dei potenziali associati a T_r. Allora T_r è un albero dei cammini minimi $\Leftrightarrow$ T_r verifica le condizioni di Bellman

$$c^{\pi}_{ij} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j \ge 0 \quad \forall (i,j) \notin T_r$$

Distribuzione di lavori

Variabili: t = tempo necessario per eseguire tutti i lavori

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ è eseguito dalla macchina } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \min t \\ \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \leq t & \forall j = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & \forall i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Selezione di sottoinsiemi

Copertura

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum a_{ij} x_j \geq 1 & \forall i \\ x_j \in \{0,1\} & \forall j \end{cases}$$

Partizione

$$\begin{cases} \min \sum c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 & \forall i \\ x_j \in \{0,1\} & \forall j \end{cases}$$

Riempimento

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum a_{ij} x_j \leq 1 & \forall i \\ x_j \in \{0,1\} & \forall j \end{cases}$$

Cammini minimi

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -(n-1) & \text{se } i = r \\ 1 & \text{se } i \neq r \end{cases}$$

Condizioni di ottimalità: Sia T_r un albero di copertura orientato di radice r e π il vettore dei potenziali associati a T_r. Allora T_r è un albero dei cammini minimi $\iff$ T_r verifica le condizioni di Bellman $c^{\pi}_{ij} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j \geq 0 \quad \forall (i,j) \notin T_r$

Albero di copertura di costo minimo

Problema: Dato un grafo $G=(N, A)$ non orientato, in cui ad ogni arco (i,j) è associato un costo c_{ij}, trovare un albero di copertura T di costo minimo, dove il costo di T è definito come $\sum_{(i,j)\in T} c_{ij}$

Sia $N=\{1 \dots n\}$

$\forall i,j = 1,\dots,n$ con $i<j$, definiamo le variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'albero contiene l'arco } (i,j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \min \sum c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i<j} x_{ij} = n-1 \\ \sum_{(i,j)\in S:\, i<j} x_{ij} \le |S|-1 \quad \forall S \subseteq N \mid |S| \ge 3 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \\ \quad i,j = 1,\dots,n \text{ con } i<j \end{cases}$$

(Vincolo di eliminazione dei cicli)

Teorema: Sia T un albero di copertura

T è un albero di copertura di costo minimo

$\iff$

$\forall (u,v) \notin T$ si ha $c_{uv} \ge c_{ij}$ $\forall (i,j) \in T$ che connette u e v

Teorema: Sia T un albero di copertura. T

T è un albero di copertura di costo minimo

$\iff$

$\forall (u,v) \in T$ si ha $c_{uv} \le c_{ij}$ $\forall (i,j) \in$ taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u,v)

Algoritmo di Kruskal

1. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, $K = 1$
2. Se $|T| = n-1 \Rightarrow$ STOP
3. Se a_K non forma un ciclo con gli archi di T $\Rightarrow T = T \cup \{a_K\}$
4. $K = K+1$ e torna al passo 1

Problema flusso massimo (PFM)

Supponiamo di avere un grafo $G=(N,A)$ in cui siano assegnate le capacità superiori u_{ij} sugli archi, il pfm consiste nello spedire il massimo flusso disponibile da un nodo origine s a un nodo destinazione t rispettando i vincoli di capacità sui tagli

$$\begin{cases} \max v \\ Ex = b \\ 0 \le x \le u \end{cases} \quad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ v & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Taglio: Un taglio (N_s, N_t) è una partizione dell'insieme N dei nodi in due sottoinsiemi, cioè

$$N = N_s \cup N_t \qquad N_s \cap N_t = \emptyset$$

Un taglio (N_s, N_t) si dice ammissibile se N_s contiene almeno l'origine e N_t almeno la destinazione

Capacità del taglio: $u(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij}$

Flusso del taglio: $x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-} x_{ij}$

Max-Flow-Min-Cut: Se esistono un flusso ammissibile x ed un taglio ammissibile (N_s, N_t) tali che $x(N_s, N_t) = u(N_s, N_t) \Rightarrow x$ flusso di valore massimo e (N_s, N_t) è un taglio di capacità minima

Grafo residuo: Dato un flusso x ammissibile, il grafo residuo (rispetto a x) è un grafo $G(x) = (N, A(x))$ con gli stessi nodi del grafo G, mentre gli archi e le loro capacità r_{ij}, dette residue, sono

$$(i,j) \in A,\ x_{ij} < u_{ij} \implies (i,j) \in A(x),\ r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$$
$$(i,j) \in A\ \ x_{ij} > 0 \implies (j,i) \in A(x)\ \ r_{ji} = x_{ij}$$

Cammino aumentante: Dato un flusso x ammissibile, un cammino aumentante (rispetto a x) è un cammino orientato da s a t nel grafo residuo $G(x)$

Flusso di costo minimo

capacitato: $\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ 0 \le x \le u \end{cases}$ ¬capacitato: $\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x \ge 0 \end{cases}$

Algoritmo dei cammini minimi successivi: mantiene ad ogni passo uno pseudoflusso minimale x, e determina un cammino aumentante di costo minimo tra un nodo $s \in O_x$ e un nodo $t \in D_x$ per diminuire, al minor costo possibile, lo sbilanciamento di x. L'uso di cammini aumentanti di costo minimo permette di conservare la minimalità degli pseudo-flussi

Programmazione Lineare

Insieme convesso: Un sottoinsieme di K di $\mathbb{R}^n$ si dice convesso se comunque si scelgano 2 punti x^1 e $x^2 \in K$ si ha

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Combinazione convessa: Un punto x di $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione c. di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\lambda_1 \dots \lambda_m$ tali che

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \quad \lambda_i \in [0,1] \ \forall i, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

Involucro convesso: L'involucro convesso di un insieme K, denotato con conv(K), è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K

Cono: Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice cono se per ogni punto $x \in K$ e per ogni $\lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$

Combinazione conica: Un punto x di $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica di $x^1 \dots x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono dei coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \quad \lambda_i \geq 0 \ \forall i$$

La combinazione si dice propria se $\lambda_i > 0 \ \forall i$

Poliedri

Un poliedro di $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$

Ogni poliedro P di $\mathbb{R}^n$ può essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema di m disequazioni lineari in n variabili

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

Direzione di recessione: è un vettore d tale che

$$x + \lambda d \in P \quad \forall x \in P, \forall \lambda \geq 0$$

Teorema di rappresentazione dei Poliedri

Dato un poliedro P, esistono un sottoinsieme finito $V = \{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $E = \{e^1, \dots, e^p\}$, eventualmente anche vuoti, tali che

$$P = conv(V) + cono(E)$$

Teorema fondamentale della PL

Supponiamo che il poliedro P sia rappresentato come

$$P = conv\{v^1, \dots, v^m\} + cono\{e^1, \dots, e^p\}$$

Se il problema (P) ha valore ottimo finito, allora esiste $k \in \{1, \dots, m\}$ tale che v^k è una soluzione ottima di (P)

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j c^T e^j \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

P ha ottimo finito $\rightarrow$ $c^T e^j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$

e λ e μ sono variabili separate

indichiamo con v^k l'elemento di $\{v^1, \dots, v^m\}$ in cui la funzione obiettivo assume il valore massimo

$\Rightarrow \forall x \in P$ otteniamo

$$\begin{aligned} c^T x &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j c^T e^j \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \max_{1 \leq i \leq m} c^T v^i \\ &= \max_{1 \leq i \leq m} c^T v^i \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \max_{1 \leq i \leq m} c^T v^i = c^T v^k \end{aligned}$$

$\Rightarrow \max_{x \in P} c^T x \leq c^T v^k$ poiché $v^k_+ \in P$, si ottiene

che $c^T v^k \leq \max_{x \in P} c^T x$

$\Rightarrow v^k$ è sol. ottima di (P)

Teorema di Farkas: Data una matrice A di ordine $m \times n$ ed un vettore $c \in \mathbb{R}^n$, i due sistemi

$$(2.7) \quad \begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} Ad \leq 0 \\ c^T d > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

sono in alternativa, cioè (2.7) ammette soluzioni

$\iff$

(2.8) è impossibile

Dualità debole

Se i poliedri P e D sono non vuoti

$\Rightarrow c^T x \leq y^T b \quad \forall x \in P, \forall y \in D$

Dualità forte

Se i poliedri P e D sono non vuoti

$\Rightarrow -\infty < v(D) = v(P) < +\infty$

dim. $\forall x \in P, y \in D$ si ha

$$\underbrace{c^T}_{=y^T A} x = \underbrace{y^T}_{\geq 0} \underbrace{Ax}_{\leq b} \leq y^T b$$

Scarti complementari

Supponiamo che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano ammissibili rispettivamente per (P) e (D) $\Rightarrow$

$\bar{x}, \bar{y}$ sono ottime $\iff \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$

Quando $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$ si dice che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono in scarti complementari dim.

Per il teorema della dualità forte due sol ammissibili $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime

$$\Longleftrightarrow$$

hanno lo stesso valore:

$$c^T x = y^T A \bar{x} = y^T b$$

cioè

$$y^T (b - A\bar{x}) = 0$$

Base: Insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ tale che la sottomatrice A_B ottenuta da A estraendo le righe A_i, $i \in B$, sia invertibile, cioè con $\det(A_B) \neq \emptyset$

Soluzione di base primale: $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$

Soluzione di base duale: $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$

dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$, $\bar{y}_N = 0$

PLI

Modello:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (P)$$

$\leftarrow$ Vincolo di interezza

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

$\leftarrow$ Rilassamento Continuo

Th. Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P)

Th. Se la soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P) $\Rightarrow$ è ottima anche per (P)

Spesso la soluzione ottima di (RC) non è ammissibile per (P)

Th. $conv(\Omega)$ è un poliedro

Th. I vertici di $conv(\Omega)$ appartengono a Ω

Th. I problemi

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^T x \\ x \in conv(\Omega) \end{cases}$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

Disuguaglianze valide e piani di taglio

In generale è difficile caratterizzare $conv(\Omega)$ $\Rightarrow$ si aggiungono vincoli alla regione ammissibile in modo da approssimare $conv(\Omega)$

DV: La disequazione $p^T x \leq p_0$ è detta disuguaglianza valida per l'insieme Ω se

$$p^T x \leq p_0 \quad \forall x \in \Omega$$

Piano di taglio: disuguaglianza valida $p^T x \leq p_0$ per Ω tale che $p^T \bar{x} > p_0$, dove $\bar{x}$ è l'ottimo del rilassamento continuo

Piani di taglio di Gomory:

Supponiamo che il problema di PLI sia nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

e che B sia una base ottima di (RC). Poniamo

$$A = (A_B \; A_N) \qquad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \bar{x}_B \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N$$

La parte frazionaria di un numero reale z è

$$\{z\} := z - \lfloor z \rfloor$$

Teorema:

Se esiste $r \in B$ tale che $\tilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\}$$

è un piano di taglio di gomory per il problema (P)

dim. $\quad x \in \Omega$

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$$

$$\Rightarrow \quad x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N = \tilde{b} - \tilde{A} x_N$$

definiamo $\tilde{x} = x_B$. Quindi

$$\tilde{x}_r = \tilde{b}_r - \sum_{j \in N} \tilde{a}_{rj} x_j$$

$$= \lfloor \tilde{b}_r \rfloor + \{\tilde{b}_r\} - \sum_{j \in N} (\lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor + \{\tilde{a}_{rj}\}) x_j$$

$$= \lfloor \tilde{b}_r \rfloor + \{\tilde{b}_r\} - \sum_{j \in N} \lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor x_j - \sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j$$

$$\rightarrow \sum_{j\in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j - \{\tilde{b}_r\} = \lfloor \tilde{b}_r \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor x_j - \tilde{x}_r \in \mathbb{Z}$$

Inoltre si ha

$$\sum_{j\in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j - \{\tilde{b}_r\} \geq - \{\tilde{b}_r\} > -1$$

$$\Longrightarrow \sum_{j\in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\}$$

$\downarrow$

che è una DV

TSP Simmetrico

Modello:

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i\in S, j\notin S}} x_{ij} + \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i\notin S, j\in S}} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset N,\ 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{|N|}{2} \rceil \\ \sum_{(h,i)\in A} x_{hi} + \sum_{(i,k)\in A} x_{ik} = 2 & \forall i \in N \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A \end{cases}$$