

*Massimo Pappalardo, Mauro Passacantando*

# Ricerca Operativa

SECONDA EDIZIONE

Pappalardo, Massimo  
Ricerca operativa / Massimo Pappalardo, Mauro Passacantando. - Pisa : Pisa  
university press, c2012 (Didattica e ricerca. Manuali)

658.4034 (21.)

1. Ricerca operativa I. Passacantando, Mauro

CIP a cura del Sistema bibliotecario dell'Università di Pisa

© Copyright 2012 Pisa University Press srl  
Società con socio unico Università di Pisa  
Capitale Sociale Euro 20.000,00 i.v. - Partita IVA 02047370503  
Sede legale: Lungarno Pacinotti 43/44 - 56126, Pisa  
Tel. + 39 050 2212056 Fax + 39 050 2212945  
e-mail: [press@unipi.it](mailto:press@unipi.it)

*Member of*



**Association of American  
University Presses**

ISBN 978-88-6741-073-6

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail [segreteria@aidro.org](mailto:segreteria@aidro.org) e sito web [www.aidro.org](http://www.aidro.org)

*“Mimì, [...] fai un segno di croce, sullo stradario di Vigata, per indicare dove stanno di casa questi che hanno il cognome che principia con la O. Quindi traccia un percorso ideale, il più breve, perché al momento opportuno possiamo avvertire tutti nel minor tempo possibile.”*

Andrea Camilleri, La prima indagine di Montalbano.



# Indice

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introduzione</b>                         | <b>9</b>   |
| <br>  |            |
| <b>I Programmazione Lineare (PL)</b>        | <b>13</b>  |
| <br>  |            |
| <b>1 Problemi e modelli di PL</b>           | <b>15</b>  |
| 1.1 Produzione . . . . .                    | 15         |
| 1.2 Dieta . . . . .                         | 16         |
| 1.3 Miscelazione . . . . .                  | 17         |
| <br>  |            |
| <b>2 Teoria della PL</b>                    | <b>19</b>  |
| 2.1 Geometria della PL . . . . .            | 19         |
| 2.2 Condizioni di ottimalità . . . . .      | 33         |
| 2.3 Teoria della dualità . . . . .          | 37         |
| 2.4 Algebra della PL . . . . .              | 50         |
| 2.5 PL parametrica . . . . .                | 61         |
| <br>  |            |
| <b>3 Algoritmo del simplesso</b>            | <b>63</b>  |
| 3.1 Semplesso primale . . . . .             | 63         |
| 3.2 Semplesso duale . . . . .               | 75         |
| 3.3 Regole anticiclo di Bland . . . . .     | 83         |
| <br>  |            |
| <b>4 Esercizi di PL</b>                     | <b>91</b>  |
| <br>  |            |
| <b>II Programmazione Lineare su reti</b>    | <b>103</b> |
| <br>  |            |
| <b>5 Problemi e modelli di PL su reti</b>   | <b>105</b> |
| 5.1 Flusso di costo minimo . . . . .        | 105        |
| 5.2 Trasporto . . . . .                     | 108        |
| 5.3 Cammini minimi . . . . .                | 110        |
| 5.4 Flusso massimo . . . . .                | 111        |
| 5.5 Assegnamento di costo minimo . . . . .  | 113        |
| 5.6 Addestramento di costo minimo . . . . . | 114        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 5.7        | Accoppiamento di cardinalità massima . . . . .        | 116        |
| <b>6</b>   | <b>Flusso di costo minimo</b>                         | <b>117</b> |
| 6.1        | Proprietà della matrice di incidenza . . . . .        | 117        |
| 6.2        | Flusso di costo minimo non capacitato . . . . .       | 122        |
| 6.3        | Flussi e potenziali di base . . . . .                 | 141        |
| 6.4        | Algoritmo del simplesso per flussi . . . . .          | 151        |
| <b>7</b>   | <b>Cammini minimi</b>                                 | <b>163</b> |
| 7.1        | Algoritmo del simplesso per cammini . . . . .         | 164        |
| 7.2        | Algoritmo di Dijkstra . . . . .                       | 169        |
| 7.3        | Algoritmo di Bellman–Ford . . . . .                   | 175        |
| <b>8</b>   | <b>Flusso massimo</b>                                 | <b>185</b> |
| 8.1        | Algoritmo del simplesso per flusso massimo . . . . .  | 185        |
| 8.2        | Problema del taglio di capacità minima . . . . .      | 192        |
| 8.3        | Algoritmo di Ford–Fulkerson . . . . .                 | 194        |
| <b>9</b>   | <b>Esercizi di PL su reti</b>                         | <b>211</b> |
| <b>III</b> | <b>Programmazione Lineare Intera (PLI)</b>            | <b>225</b> |
| <b>10</b>  | <b>Problemi e modelli di PLI</b>                      | <b>227</b> |
| 10.1       | Carico fisso . . . . .                                | 227        |
| 10.2       | Alternative . . . . .                                 | 228        |
| 10.3       | Distribuzione di lavori . . . . .                     | 229        |
| 10.4       | Selezione di sottoinsiemi . . . . .                   | 232        |
| <b>11</b>  | <b>Teoria della PLI</b>                               | <b>239</b> |
| 11.1       | Relazioni tra PL e PLI . . . . .                      | 239        |
| 11.2       | Caratterizzazione della regione ammissibile . . . . . | 244        |
| 11.3       | Piani di taglio . . . . .                             | 247        |
| <b>12</b>  | <b>Metodo del <i>Branch and Bound</i></b>             | <b>251</b> |
| 12.1       | Regole generali . . . . .                             | 251        |
| 12.2       | Rilassamento lagrangiano . . . . .                    | 256        |
| <b>13</b>  | <b>Caricamento</b>                                    | <b>261</b> |
| 13.1       | Risoluzione con il <i>Branch and Bound</i> . . . . .  | 262        |
| 13.2       | Risoluzione con la programmazione dinamica . . . . .  | 271        |

|  |                |
|--|----------------|
| <b>14 Commesso viaggiatore</b>                             | <b>275</b>     |
| 14.1 Problema asimmetrico . . . . .                        | 275            |
| 14.2 Problema simmetrico . . . . .                         | 280            |
| <b>15 Esercizi di PLI</b>                                  | <b>289</b>     |
| <br><b>IV Programmazione Non Lineare (PNL)</b>             | <br><b>299</b> |
| <b>16 Problemi e modelli di PNL</b>                        | <b>301</b>     |
| 16.1 Data fitting . . . . .                                | 301            |
| 16.2 Portafoglio ottimale . . . . .                        | 302            |
| <b>17 Teoria della PNL</b>                                 | <b>305</b>     |
| 17.1 Esistenza di ottimi globali . . . . .                 | 305            |
| 17.2 Regolarità dei vincoli . . . . .                      | 307            |
| 17.3 Condizioni di ottimalità del primo ordine . . . . .   | 314            |
| 17.4 Condizioni di ottimalità del secondo ordine . . . . . | 318            |
| <b>18 Metodi di PNL per funzioni di una variabile</b>      | <b>329</b>     |
| 18.1 Algoritmi . . . . .                                   | 329            |
| 18.2 Metodi esatti . . . . .                               | 332            |
| 18.3 Metodi inesatti . . . . .                             | 336            |
| <b>19 Metodi di PNL per funzioni di più variabili</b>      | <b>339</b>     |
| 19.1 Metodo del gradiente . . . . .                        | 340            |
| 19.2 Metodo del gradiente coniugato . . . . .              | 346            |
| 19.3 Metodo di Newton . . . . .                            | 350            |
| 19.4 Metodo di Frank-Wolfe . . . . .                       | 356            |
| 19.5 Metodo del gradiente proiettato . . . . .             | 359            |
| <b>20 Esercizi di PNL</b>                                  | <b>363</b>     |
| <b>A Prerequisiti</b>                                      | <b>367</b>     |





# Introduzione

I problemi di Ricerca Operativa sono problemi decisionali di ottimizzazione di un obiettivo in presenza di risorse limitate. Sono caratterizzati dal fatto che, generalmente, si costruisce un modello matematico che li descrive e poi si risolve il modello.

Un modello matematico di ottimizzazione è un problema di massimo o minimo di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ristretta ad una regione  $\Omega$  dello spazio definita da vincoli espressi tramite intersezioni di insiemi di livello di funzioni a valori reali:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\},$$

dove  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Dati due vettori  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , la notazione  $a \leq b$  è da intendersi  $a_i \leq b_i$  per ogni componente  $i = 1, \dots, n$ . Un problema di massimo si può trasformare in modo equivalente in uno di minimo e viceversa poiché si ha

$$\max f(x) = -\min -f(x)$$

ed i punti di massimo di  $f$  coincidono con i punti di minimo di  $-f$ .

La funzione  $f$  è chiamata funzione obiettivo, l'insieme  $\Omega$  regione ammissibile, ciascuna delle disequazioni  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ed equazioni  $h_j(x) = 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ , che descrivono  $\Omega$  è detta vincolo. In seguito si adotterà la convenzione che il minimo (massimo) di una funzione su una regione ammissibile vuota è  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

Un punto  $x^* \in \Omega$  è detto *minimo globale (o assoluto)* di  $f$  su  $\Omega$  se

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Un punto  $x^* \in \Omega$  è detto *minimo locale (o relativo)* di  $f$  su  $\Omega$  se esiste una sfera  $B(x^*, r)$  di centro  $x^*$  e raggio  $r$  tale che

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \Omega \cap B(x^*, r).$$

Le definizioni di massimo globale e massimo locale si ottengono dalle precedenti sostituendo  $\geq$  al posto di  $\leq$ .

Il volume è diviso in quattro parti. Nella prima verranno trattati i problemi di Programmazione Lineare (PL), cioè problemi di ottimizzazione in cui è lineare sia la funzione obiettivo  $f(x) = c^T x$ , con  $c \in \mathbb{R}^n$ , che i vincoli  $g(x) = Ax - b$  e  $h(x) = Cx - d$ , dove  $A$  è una matrice  $m \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $C$  una matrice  $p \times n$  e  $d \in \mathbb{R}^p$ . La seconda parte è dedicata

ai problemi di PL su reti, cioè particolari problemi di PL definiti su un grafo. Nella terza parte saranno analizzati i problemi di Programmazione Lineare Intera (PLI), cioè problemi di PL in cui è presente anche il vincolo  $x \in \mathbb{Z}^n$ , cioè le variabili devono assumere valori interi. Infine, nella quarta parte saranno trattati i problemi di Programmazione Non Lineare (PNL) in cui non tutte le funzioni  $f$ ,  $g_i$  con  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_j$  con  $j = 1, \dots, p$  sono lineari.

Un problema di Ricerca Operativa si evolve attraverso vari stadi. Si possono evidenziare i più importanti:

- raccolta dei dati del problema utili per la risoluzione,
- costruzione del modello matematico che rappresenti un giusto equilibrio tra problema reale e trattabilità matematica. Individuazione delle variabili, della funzione obiettivo e dei vincoli,
- studio delle proprietà teoriche del modello matematico. Ricerca della soluzione ottima,
- costruzione ed implementazione di un algoritmo,
- risoluzione numerica,
- retroazione (*feedback*) sul problema di partenza,

Gli algoritmi sono gli strumenti matematici per risolvere un problema e che, se la soluzione è condotta tramite il calcolo automatico, divengono di fondamentale importanza. Per formalizzare il concetto di algoritmo diamo la seguente definizione.

**Definizione.** Un algoritmo è una sequenza<sup>1</sup> di istruzioni<sup>2</sup> chiare<sup>3</sup> che un esecutore<sup>4</sup>, in tempo limitato<sup>5</sup>, compie<sup>6</sup> per ottenere<sup>7</sup> una<sup>8</sup> soluzione<sup>9</sup> di un<sup>10</sup> problema<sup>11</sup>.

Di fondamentale importanza è dimostrare la correttezza di un algoritmo cioè dimostrare che la soluzione determinata sia effettivamente la soluzione cercata.

Per valutare l'efficienza di un algoritmo che termina in un numero finito di iterazioni con una soluzione esatta del problema, bisogna introdurre dei concetti quantitativi. La

---

<sup>1</sup>Sono ordinate (determinismo).

<sup>2</sup>Ci sono programmi e linguaggi di programmazione.

<sup>3</sup>Sono certe e uniche.

<sup>4</sup>Un calcolatore o più calcolatori.

<sup>5</sup>Complessità computazionale.

<sup>6</sup>Lavora su dati di ingresso che hanno una "struttura".

<sup>7</sup>Correttezza dell'algoritmo che consiste nel dimostrare che l'algoritmo termina fornendo una soluzione del problema.

<sup>8</sup>Approssimata, esatta, euristica.

<sup>9</sup>Decisionale, di ricerca o di ottimizzazione.

<sup>10</sup>Classi di problemi.

<sup>11</sup>Modellistica che consiste nel trasformare un problema in un modello matematico.

## INTRODUZIONE

complessità computazionale di un algoritmo è uno dei più importanti parametri secondo cui si giudica un algoritmo. Con dimensione di un problema si intende la quantità di informazioni necessarie a rappresentarlo (aritmetica intera e alfabeto almeno binario) mentre il tempo di calcolo è il numero di operazioni matematiche elementari da effettuare (addizioni, moltiplicazioni, confronti tra numeri).



# Parte I

## Programmazione Lineare (PL)



# Capitolo 1

## Problemi e modelli di PL

### 1.1 Produzione

Supponiamo che si debbano produrre  $n$  oggetti, ciascuno dei quali sia composto da  $m$  diverse materie prime in proporzioni, diverse tra loro, date da una matrice di composizione  $A$ . In tale matrice l'elemento  $a_{ij}$  rappresenta la quantità di materia prima  $i$  che serve per produrre l'oggetto  $j$ . Supponiamo di conoscere il guadagno  $c_j$  ottenuto vendendo l'oggetto  $j$  e la disponibilità  $b_i$  della materia prima  $i$ . Si voglia determinare il piano di produzione ottimo. Introducendo le variabili  $x_j$ , con  $j = 1, \dots, n$ , che rappresentano le quantità prodotta dell'oggetto  $j$ , il problema può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & \text{per ogni } i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & \text{per ogni } j = 1, \dots, n \end{cases}$$

**Esempio 1.1.1.** Un'azienda deve produrre due tipi di tessuto. Supponiamo che per produrre ogni quintale del primo tessuto ci sia bisogno di 28 kg di lana e 7 kg di cotone, mentre per produrre il secondo tipo ci sia bisogno di 7 kg di lana e 14 kg di cotone. Supponiamo inoltre che per produrre i tessuti ci sia bisogno di 3 ore di lavoro di un operaio per ogni quintale di prodotto. Supponiamo di avere a disposizione ogni settimana 168 kg di lana disponibili, 84 kg di cotone disponibili e 42 ore di lavoro disponibile. Siano 20 e 10 euro i guadagni per chilo, rispettivamente, per il tessuto 1 e per il tessuto 2. Indichiamo con  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente i chilogrammi prodotti del primo e del secondo tessuto. Il problema di massimizzare il guadagno rispettando i vincoli di produzione è il seguente:

$$\begin{cases} \max 20x_1 + 10x_2 \\ 28x_1 + 7x_2 \leq 168 \\ 7x_1 + 14x_2 \leq 84 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Qualora il bene da produrre non fosse stato divisibile come è il caso del tessuto ma fosse stato indivisibile, quale poteva essere il caso, per rimanere nello stesso ambito e con gli stessi significati, di un vestito anziché di un chilogrammo di tessuto si sarebbe dovuto aggiungere il vincolo di interezza  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

## 1.2 Dieta

Supponiamo di avere a disposizione  $n$  cibi contenenti  $m$  principi nutrizionali essenziali (proteine, vitamine, etc.). Supponiamo di conoscere la quantità  $a_{ij}$  dell' $i$ -esimo principio nutrizionale contenuta nel  $j$ -esimo cibo ed il costo unitario  $c_j$  del  $j$ -esimo cibo. Si vuole determinare una dieta giornaliera, nel senso di un piano nutrizionale che minimizzi il costo totale e che rispetti il fabbisogno minimo giornaliero  $b_i$  (che supponiamo noto) di ogni principio nutrizionale  $i = 1, \dots, m$ . Introduciamo le variabili  $x_j$ , con  $j = 1, \dots, n$ , ognuna delle quali rappresenta la quantità (rappresentata nella sua unità di misura) di cibo  $j$  da introdurre giornalmente nella dieta.

Il problema della dieta può essere formulato come il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & \text{per ogni } i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & \text{per ogni } j = 1, \dots, n \end{cases}$$

**Esempio 1.2.1.** Si hanno a disposizione quattro prodotti grezzi (orzo, avena, polpa di barbabietola, farina di arachidi) con i quali si vuole produrre un mangime per animali. Il cibo deve contenere almeno 20 unità di proteine e 5 unità di grassi. I costi unitari dei prodotti e le unità di proteine e di grassi contenute in ogni unità di prodotto sono:

|              | proteine | grassi | costo |
|--------------|----------|--------|-------|
| orzo         | 12       | 2      | 24    |
| avena        | 12       | 6      | 30    |
| barbabietola | 40       | 12     | 40    |
| arachidi     | 60       | 2      | 50    |

Indichiamo con  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  rispettivamente il numero di unità di orzo, avena, barbabietola e farina di arachidi impegnate nel mangime. Il problema di produrre a costo minimo può essere così formulato:

$$\begin{cases} \min 24x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 50x_4 \\ 12x_1 + 12x_2 + 40x_3 + 60x_4 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$



dove la prima disequazione rappresenta il vincolo sulle proteine presenti, mentre la seconda rappresenta il vincolo sui grassi.

□

## 1.3 Miscelazione

Supponiamo di avere a disposizione alcuni prodotti che devono essere miscelati al fine di ottenerne altri. Le situazioni più classiche sono quelle di miscelazione di petrolio di varie qualità per produrre benzine di vario tipo, miscelazioni di prodotti chimici per ottenere miscele, mescole di metalli per ottenere leghe, etc. Nella produzione dei nuovi materiali si suppone che la miscela debba contenere almeno una certa quantità percentuale di ciascuno dei prodotti di base. I costi di miscelazione si suppongono proporzionali, ed è normalmente fissata una quantità di partenza disponibile di ognuno dei prodotti di base. Essendo presente un problema di unità di misura la scelta delle variabili diventa essenziale.

**Esempio 1.3.1.** Una compagnia raccoglie 4 diversi tipi di materiali di scarto per miscelarli e formare 3 prodotti vendibili A, B e C. Una prima tabella di dati è la seguente:

| prodotto | miscelazione  | costo<br>(euro/kg) | profitto<br>(euro/kg) |
|----------|---|--------------------|-----------------------|
| A        | materiale 1: $\leq 30\%$<br>materiale 2: $\geq 40\%$<br>materiale 3: $\leq 50\%$<br>materiale 4: $= 20\%$ | 3                  | 8.50                  |
| B        | materiale 1: $\leq 50\%$<br>materiale 2: $\geq 10\%$<br>materiale 4: $= 10\%$                             | 2.50               | 7                     |
| C        | materiale 1: $\leq 70\%$  | 2                  | 5.50                  |

Supponiamo che il materiale abbia una certa disponibilità ed un costo di trattamento dati da:

| materiale | disponibilità<br>(kg) | costo di trattamento<br>(euro/kg) |
|-----------|-----------------------|-----------------------------------|
| 1         | 3000                  | 3                                 |
| 2         | 2000                  | 6                                 |
| 3         | 4000                  | 4                                 |
| 4         | 1000                  | 5                                 |

Supponiamo che siano presenti altri vincoli: almeno la metà di ogni materiale deve essere usata e sono a disposizione al massimo 30000 euro per il trattamento dei materiali. Introduciamo le variabili

$$x_{ij} = \text{numero di kg del materiale } j \text{ usati nella produzione del prodotto } i \\ \text{con } i = A, B, C \text{ e } j = 1, 2, 3, 4.$$

## 1. PROBLEMI E MODELLI DI PL

Il modello finale sarà:

$$\max \quad 5.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 4.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) + 3.5(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})$$

soggetto ai seguenti vincoli:

- vincoli di miscelazione

$$\begin{aligned}x_{A1} &\leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \\x_{A2} &\geq 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \\x_{A3} &\leq 0.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \\x_{A4} &= 0.2(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \\x_{B1} &\leq 0.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \\x_{B2} &\geq 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \\x_{B4} &= 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \\x_{C1} &\leq 0.7(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})\end{aligned}$$

- vincoli di disponibilità

$$\begin{aligned}x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\leq 3000 \\x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\leq 2000 \\x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\leq 4000 \\x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\leq 1000\end{aligned}$$

- vincoli sui materiali trattati

$$\begin{aligned}x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\geq 1500 \\x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\geq 1000 \\x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\geq 2000 \\x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\geq 500\end{aligned}$$

- costo di trattamento

$$\begin{aligned}&3(x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}) + 6(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}) + \\&+ 4(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3}) + 5(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4}) \leq 30000 \\&x_{ij} \geq 0 \quad i = A, B, C, \quad j = 1, 2, 3, 4\end{aligned}$$

□

# Capitolo 2

## Teoria della PL

### 2.1 Geometria della PL

#### Insiemi convessi e coni

**Definizione 2.1.1.** (Insieme convesso)

Un sottoinsieme  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice *convesso* se comunque si scelgono due punti  $x^1, x^2 \in K$  si ha

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

In altre parole, se  $K$  contiene due punti  $x^1$  e  $x^2$ , allora contiene anche tutto il segmento di estremi  $x^1$  e  $x^2$  (vedi Figura 2.1).

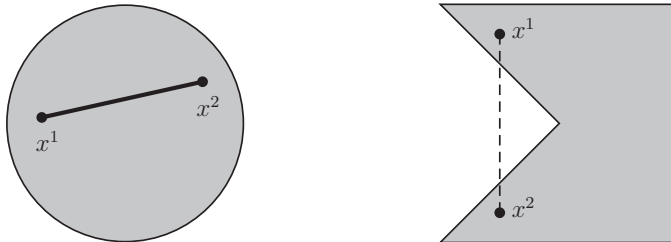


Figura 2.1: a sinistra: un insieme convesso; a destra: un insieme non convesso.

**Definizione 2.1.2.** (Combinazione convessa)

Un punto  $x$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice *combinazione convessa* di  $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$  se esistono dei

## 2. TEORIA DELLA PL

coefficienti  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  tali che

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \in [0, 1] \text{ per ogni } i, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

La combinazione convessa si dice propria se  $0 < \lambda_i < 1$  per ogni  $i$ .

**Definizione 2.1.3.** (Involucro convesso)

L'involucro convesso di un insieme  $K$ , denotato da  $\text{conv}(K)$ , è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di  $K$ .

Si può dimostrare che  $\text{conv}(K)$  è il più piccolo (nel senso della inclusione) insieme convesso che contiene  $K$  e quindi un insieme convesso coincide con il suo involucro convesso.

**Esempio 2.1.1.** Consideriamo 3 punti nel piano:

$$x^1 = (1, 1), \quad x^2 = (3, 1), \quad x^3 = (2, 3).$$

Il punto  $x = (2, 2)$  è una combinazione convessa di  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$ , infatti:

$$x = \frac{1}{4} x^1 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x^3.$$

Si può dimostrare che l'involucro convesso dei punti  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$  è il triangolo avente per vertici i tre punti (vedi Figura 2.2).

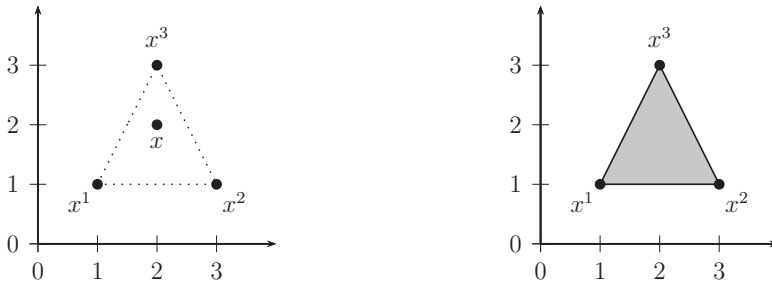


Figura 2.2: a sinistra:  $x$  è una combinazione convessa di  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$ ; a destra: il triangolo in grigio è l'involucro convesso di  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$ .

□

**Definizione 2.1.4.** (Cono)

Un sottoinsieme  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice *cono* se per ogni punto  $x \in K$  e per ogni  $\lambda \geq 0$  si ha  $\lambda x \in K$ . In altre parole, se  $K$  contiene un punto  $x$  diverso dall'origine, allora contiene anche tutta la semiretta uscente dall'origine passante per  $x$ .

Un cono può essere convesso oppure non convesso (vedi Figura 2.3).

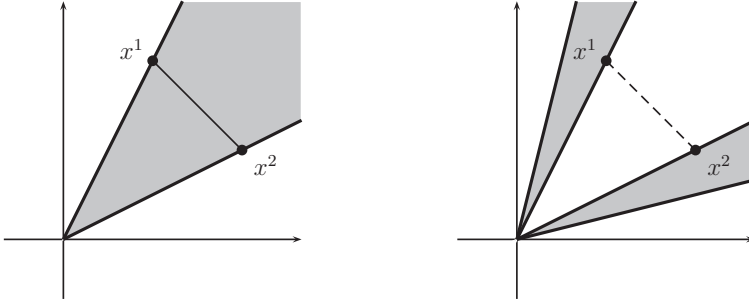


Figura 2.3: a sinistra: un cono convesso; a destra: un cono non convesso.

**Definizione 2.1.5.** (Combinazione conica)

Un punto  $x$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice *combinazione conica* di  $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$  se esistono dei coefficienti  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  tali che

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ per ogni } i.$$

La combinazione conica si dice *propria* se  $\lambda_i > 0$  per ogni  $i$ .

**Definizione 2.1.6.** (Involucro conico)

L'involucro conico di un insieme  $K$ , denotato da  $\text{cono}(K)$ , è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di  $K$ .

Si può dimostrare che  $\text{cono}(K)$  è il più piccolo (nel senso della inclusione) cono convesso che contiene  $K$  e che un insieme è un cono convesso se e solo se coincide con il suo involucro conico.

**Esempio 2.1.2.** Dati i punti  $x^1 = (2, 3)$  e  $x^2 = (3, 1)$ , il punto  $x = (3, 13/6)$  è una loro combinazione conica, infatti:

$$x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{2}{3}x^2,$$

mentre il loro involucro conico è il cono rappresentato in Figura 2.4.

□

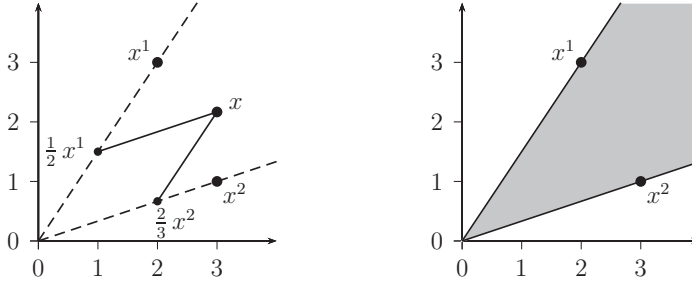


Figura 2.4: a sinistra:  $x$  è una combinazione conica di  $x^1$  e  $x^2$ ; a destra: il cono in grigio è l'involucro conico di  $x^1$  e  $x^2$ .

## Poliedri

Un semispazio chiuso in  $\mathbb{R}^n$  può essere descritto algebricamente come l'insieme delle soluzioni di una disequazione lineare in  $n$  variabili:

$$\alpha^\top x \leq \beta, \quad \text{dove } \alpha \in \mathbb{R}^n \text{ e } \beta \in \mathbb{R}.$$

### Definizione 2.1.7. (Poliedro)

Un poliedro di  $\mathbb{R}^n$  è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di  $\mathbb{R}^n$ .

Ogni poliedro  $P$  di  $\mathbb{R}^n$  può essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema di  $m$  disequazioni lineari in  $n$  variabili:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

dove  $A$  è una matrice  $m \times n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Un poliedro è un insieme convesso perché i semispazi chiusi sono insiemi convessi e l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

### Esempio 2.1.3. Il poliedro

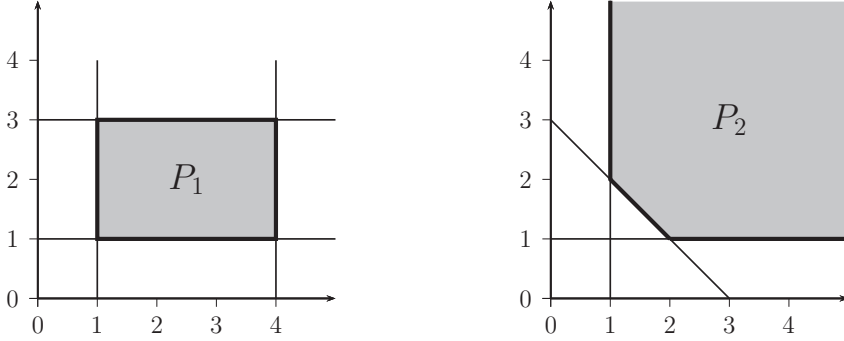
$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_2 \leq 3\}$$

è limitato mentre il poliedro

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$$

non è limitato (vedi Figura 2.5).

□


 Figura 2.5:  $P_1$  è un poliedro limitato,  $P_2$  è un poliedro non limitato.

Un poliedro che è anche cono si chiama cono poliedrico e si può interpretare come l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di disequazioni lineari.

**Proposizione 2.1.1.** *Se  $P$  è un cono poliedrico allora esiste una matrice  $Q$  tale che*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}.$$

**Dimostrazione.** Poiché  $P$  è un poliedro si può scrivere nella forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq q\}$ . Facciamo vedere che

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq q\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}.$$

$\supseteq$ :  $P$  è un cono e quindi contiene l'origine, ossia  $0 = Q0 \leq q$ , quindi se  $Qx \leq 0$ , allora  $Qx \leq q$ .

$\subseteq$ : se  $Qx \leq q$ , cioè  $x \in P$ , allora anche  $\lambda x \in P$  per ogni  $\lambda > 0$ , ossia si deve avere  $Q(\lambda x) \leq q$  per ogni  $\lambda > 0$ , ovvero

$$Qx \leq \frac{q}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0,$$

e quindi  $Qx \leq 0$ .

□

**Esempio 2.1.4.** Il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0\}$  è un cono poliedrico (vedi Figura 2.6).

□

**Definizione 2.1.8.** (Vertice)

Un *vertice* di un poliedro è un punto del poliedro che non si può esprimere come combinazione convessa propria di altri punti del poliedro. L'insieme dei vertici di un poliedro  $P$  viene denotato con  $\text{vert}(P)$ .

## 2. TEORIA DELLA PL

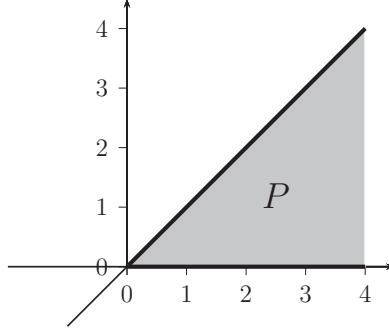


Figura 2.6:  $P$  è un cono poliedrico.

**Esempio 2.1.5.** Nell'Esempio 2.1.3 i vertici del poliedro  $P_1$  sono i punti  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(4, 1)$  e  $(4, 3)$ , mentre i vertici di  $P_2$  sono  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$ .  $\square$

**Definizione 2.1.9.** (Direzione di recessione)

Una *direzione di recessione* per un poliedro  $P$  è un vettore  $d$  tale che

$$x + \lambda d \in P \quad \forall x \in P, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Quindi  $d$  è una direzione di recessione se  $P$  contiene tutte le semirette di direzione  $d$  uscenti da punti appartenenti a  $P$ . L'insieme delle direzioni di recessione di  $P$  viene denotato con  $\text{rec}(P)$ .

Ovviamente  $0 \in \text{rec}(P)$  e si osserva che se un poliedro  $P$  è limitato allora  $\text{rec}(P) = \{0\}$ .

**Esempio 2.1.6.** Nell'Esempio 2.1.3 il poliedro  $P_1$  non ha direzioni non nulle di recessione, mentre per le direzioni di recessione del poliedro  $P_2$  sono tutti i vettori del tipo  $d = (d_1, d_2)$ , con  $d_1 \geq 0$  e  $d_2 \geq 0$ , ossia  $\text{rec}(P) = \mathbb{R}_+^2$ .  $\square$

Dimostriamo che  $\text{rec}(P)$  è un cono poliedrico.

**Teorema 2.1.1.** Se un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , allora

$$\text{rec}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}.$$

**Dimostrazione.**

$\subseteq$ : se  $d$  è una direzione di recessione per  $P$ , allora abbiamo che, per ogni  $x \in P$  e per ogni  $\lambda \geq 0$ ,  $x + \lambda d \in P$  ovvero  $A(x + \lambda d) \leq b$ , cioè  $Ax + \lambda Ad \leq b$ . Se una componente del vettore  $Ad$  fosse positiva allora per  $\lambda$  sufficientemente grande si avrebbe un assurdo. Pertanto  $Ad \leq 0$ .



## 2.1 GEOMETRIA DELLA PL

$\supseteq$ : se  $Ad \leq 0$ , allora per ogni  $x \in P$  e per ogni  $\lambda \geq 0$  si ha

$$A(x + \lambda d) = Ax + \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{Ad}_{\leq 0} \leq b,$$

quindi  $d \in \text{rec}(P)$ .

□

**Esempio 2.1.7.** Il poliedro  $P_2$  dell'Esempio 2.1.3 può essere scritto nella forma  $Ax \leq b$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

quindi, per il Teorema 2.1.1 otteniamo che il suo cono di recessione è

$$\text{rec}(P_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \geq 0\} = \mathbb{R}_+^2$$

come avevamo già visto nell'Esempio 2.1.6.

□

Dimostriamo ora un risultato che sarà utile in seguito. Dati due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{R}^n$ , definiamo l'insieme  $A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}$ .

**Proposizione 2.1.2.** *Dato un poliedro  $P$ , si ha che*

$$P + \text{rec}(P) = P.$$

**Dimostrazione.**

$\subseteq$ : se  $x \in P$  e  $d \in \text{rec}(P)$ , allora  $x + d \in P$  per definizione di direzione di recessione.

$\supseteq$ : poiché  $0 \in \text{rec}(P)$ , per ogni  $x \in P$  si ha  $x = x + 0 \in P + \text{rec}(P)$ .

□

**Definizione 2.1.10.** (Direzione di linealità)

Una *direzione di linealità* per un poliedro  $P$  è un vettore  $d$  tale che

$$d \in \text{rec}(P), \quad -d \in \text{rec}(P),$$

ossia  $d$  è una direzione di linealità se  $P$  contiene tutte le rette di direzione  $d$  passanti per punti appartenenti a  $P$ . L'insieme delle direzioni di linealità di  $P$  viene denotato con  $\text{lineal}(P)$ .

Dimostriamo che l'insieme delle direzioni di linealità di un poliedro è un sottospazio vettoriale.

## 2. TEORIA DELLA PL

**Teorema 2.1.2.** *Se un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , allora*

$$\text{lineal}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

**Dimostrazione.** Dal Teorema 2.1.1 segue che

$$\text{lineal}(P) = \text{rec}(P) \cap (-\text{rec}(P)) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0, \quad Ax \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

□

**Esempio 2.1.8.** Il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_2 \leq 7, \quad -2x_2 \leq -3\}$  ha come direzioni di linealità i vettori del tipo  $d = (d_1, 0)$  con  $d_1 \in \mathbb{R}$ , ossia  $\text{lineal}(P) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$  (vedi Figura 2.7).

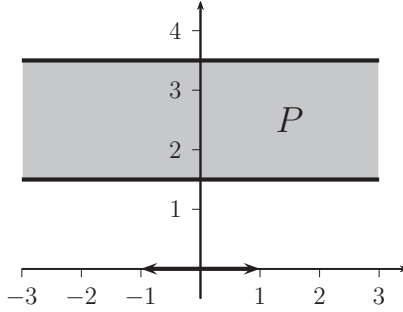


Figura 2.7: lo spazio di linealità di  $P$  è la retta  $x_2 = 0$ .

□

## Teorema di rappresentazione dei poliedri

In questo paragrafo dimostreremo un importante teorema che fornisce una caratterizzazione dei poliedri. Premettiamo alcuni lemmi.

**Lemma 2.1.1.** *L'involucro conico di un insieme finito di punti  $\{e^1, \dots, e^p\}$  è un cono poliedrico, cioè esiste una matrice  $Q$  tale che*

$$\text{cono}(e^1, \dots, e^p) = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}.$$

**Dimostrazione.** L'insieme  $\text{cono}(e^1, \dots, e^p)$  è l'insieme dei punti  $x$  per cui esiste un vettore  $\mu \in \mathbb{R}^p$ , con  $\mu \geq 0$ , tale che

$$x = \sum_{j=1}^p \mu_j e^j,$$

## 2.1 GEOMETRIA DELLA PL

ossia l'insieme cono  $(e^1, \dots, e^p)$  è la proiezione sul sottospazio delle variabili  $x$  del seguente poliedro nelle variabili  $(x, \mu)$ :

$$\begin{cases} x = \sum_{j=1}^p \mu_j e^j \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

Applicando una eliminazione successiva delle variabili  $\mu_j$  a questo sistema nelle variabili  $(x, \mu)$  si ottiene un sistema di disequazioni lineari nella sola variabile  $x$  e quindi un poliedro.

Quindi cono  $(e^1, \dots, e^p)$  è un cono poliedrico e per la Proposizione 2.1.1 si può scrivere nella forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$ .  $\square$

**Lemma 2.1.2.** *Un cono poliedrico  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$  è l'involucro conico di un insieme finito di suoi punti.*

**Dimostrazione.** Indichiamo con  $A_1, \dots, A_m$  le righe della matrice  $A$ . Dal Lemma 2.1.1 si ha che

$$\text{cono}(A_1, \dots, A_m) = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}. \quad (2.1)$$

Indichiamo con  $Q_1, \dots, Q_t$  le righe della matrice  $Q$  e dimostriamo che  $\text{cono}(Q_1, \dots, Q_t) = P$ .

$\subseteq$ : Per ogni  $i = 1, \dots, m$  e per ogni  $j = 1, \dots, t$  si ha che:

$$A_i Q_j^T = Q_j A_i^T \leq 0$$

perché i vettori  $A_1, \dots, A_m$  appartengono al cono  $\{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$ , quindi  $AQ_j \leq 0$ , cioè  $Q_j \in P$ , per ogni  $j = 1, \dots, t$ .

$\supseteq$ : consideriamo un punto  $x \in P$ . Sfruttando ancora il Lemma 2.1.1 otteniamo che

$$\text{cono}(Q_1, \dots, Q_t) = \{x \in \mathbb{R}^n : Wx \leq 0\}. \quad (2.2)$$

Indicando con  $W_1, \dots, W_s$  le righe della matrice  $W$ , si ottiene dall'equazione (2.2) che  $W_i Q_j^T = Q_j W_i^T \leq 0$ , ovvero

$$W_i \in \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\} = \text{cono}(A_1, \dots, A_m), \quad \forall i = 1, \dots, s$$

cioè esistono dei coefficienti  $\mu_{ij} \geq 0$  tali che  $W_i = \sum_{j=1}^m \mu_{ij} A_j$  da cui si ricava che

$$W_i x = \left( \sum_{j=1}^m \mu_{ij} A_j \right) x = \sum_{j=1}^m \underbrace{\mu_{ij}}_{\geq 0} \underbrace{A_j x}_{\leq 0} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, s$$

ossia  $Wx \leq 0$ , cioè  $x \in \text{cono}(Q_1, \dots, Q_t)$ .  $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il risultato principale del paragrafo.

## 2. TEORIA DELLA PL

**Teorema 2.1.3.** (Rappresentazione dei poliedri)

*Dato un poliedro  $P$ , esistono un sottoinsieme finito  $V = \{v^1, \dots, v^m\}$  di  $P$  ed un insieme finito  $E = \{e^1, \dots, e^p\}$ , eventualmente anche vuoti, tali che*

$$P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E).$$

**Dimostrazione.** Scriviamo  $P$  nella forma

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

e definiamo il seguente cono poliedrico

$$C = \{(u, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0, \quad Au - tb \leq 0\}.$$

Per il Lemma 2.1.2 esistono  $s$  vettori  $(u^1, t_1), \dots, (u^s, t_s)$  tali che

$$C = \text{cono}((u^1, t_1), \dots, (u^s, t_s)).$$

Normalizzando i vettori  $(u^1, t_1), \dots, (u^s, t_s)$  rispetto all'ultima componente, otteniamo

$$C = \text{cono}((v^1, 1), \dots, (v^m, 1), (e^1, 0), \dots, (e^p, 0)), \quad \text{con } p \geq 0.$$

Osserviamo che  $x \in P$  se e solo se  $(x, 1) \in C$  e dunque  $x \in P$  se e solo se esistono due vettori  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu \in \mathbb{R}^p$  con  $\lambda, \mu \geq 0$ , tali che

$$(x, 1) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (v^i, 1) + \sum_{j=1}^p \mu_j (e^j, 0),$$

che equivale a

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v^i + \sum_{j=1}^p \mu_j e^j, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Questo significa che  $x \in P$  se e solo se  $x \in \text{conv}(v^1, \dots, v^m) + \text{cono}(e^1, \dots, e^p)$ , dove i vettori  $v^1, \dots, v^m \in P$  perché  $(v^1, 1), \dots, (v^m, 1) \in C$ . □

**Teorema 2.1.4.** *Dato un poliedro  $P$ , esiste un sottoinsieme finito  $V$  di  $P$  tale che*

$$P = \text{conv}(V) + \text{rec}(P).$$

**Dimostrazione.** Per il Teorema 2.1.3 sappiamo che  $P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$ , con  $V = \{v^1, \dots, v^m\} \subseteq P$  ed  $E = \{e^1, \dots, e^p\}$ , quindi basta dimostrare che  $\text{cono}(E) = \text{rec}(P)$ .

⊆: poiché  $\text{rec}(P)$  è un cono convesso, basta dimostrare che  $E \subseteq \text{rec}(P)$ . Se  $x \in P$ , per il Teorema 2.1.3 abbiamo che  $x = w + z$  con  $w \in \text{conv}(V)$  e  $z \in \text{cono}(E)$ . Quindi per ogni  $u \in E$  si ha

$$x + \lambda u = \underbrace{w}_{\in \text{conv}(V)} + \underbrace{z + \lambda u}_{\in \text{cono}(E)} \in \text{conv}(V) + \text{cono}(E) = P \quad \forall \lambda \geq 0,$$

cioè  $u$  è una direzione di recessione di  $P$ .

## 2.1 GEOMETRIA DELLA PL

$\supseteq$ : consideriamo una direzione  $d \in \text{rec}(P)$ . Per il Lemma 2.1.1 possiamo scrivere

$$\text{cono}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}.$$

Fissato un punto  $x \in P$  e uno scalare  $\gamma \geq 0$ , si ha che  $x + \gamma d \in P$ , quindi esistono  $\lambda_i \geq 0$  e  $\mu_j \geq 0$ , con  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ , tali che

$$x + \gamma d = \sum_{i=1}^m \lambda_i v^i + \sum_{j=1}^p \mu_j e^j.$$

Se indichiamo con  $Q_1, \dots, Q_s$  le righe della matrice  $Q$ , allora per ogni  $k = 1, \dots, s$  si ha

$$\begin{aligned} Q_k(x + \gamma d) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i Q_k v^i + \sum_{j=1}^p \mu_j \underbrace{Q_k e^j}_{\leq 0} \\ &\leq \sum_{i=1}^m \lambda_i Q_k v^i \\ &\leq \left( \max_{i=1, \dots, m} Q_k v^i \right) \sum_{i=1}^m \lambda_i \\ &= \max_{i=1, \dots, m} Q_k v^i \end{aligned}$$

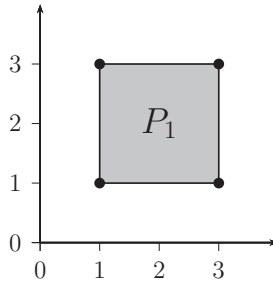
Quindi, per ogni  $\gamma \geq 0$ , la quantità  $Q_k(x + \gamma d)$  è minore o uguale ad una costante che dipende solo da  $k$  e pertanto

$$Q_k d \leq \frac{1}{\gamma} \left( \max_{i=1, \dots, m} Q_k v^i - Q_k x \right) \quad \forall \gamma > 0, \quad \forall k = 1, \dots, s,$$

da cui si ricava che  $Qd \leq 0$ , ossia  $d \in \text{cono}(E)$ .

□

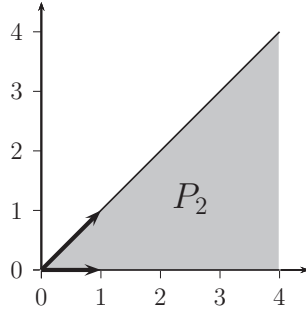
**Esempio 2.1.9.** Il poliedro limitato  $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 3, \quad 1 \leq x_2 \leq 3\}$



può essere rappresentato nella forma  $P_1 = \text{conv}((1,1), (1,3), (3,3), (3,1))$ .

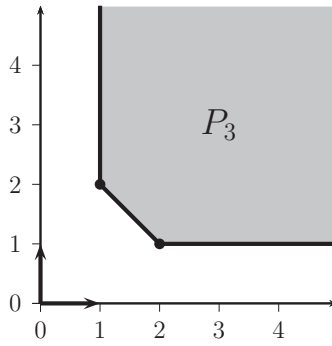
Il cono poliedrico  $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq x_1, \quad x_2 \geq 0\}$

## 2. TEORIA DELLA PL



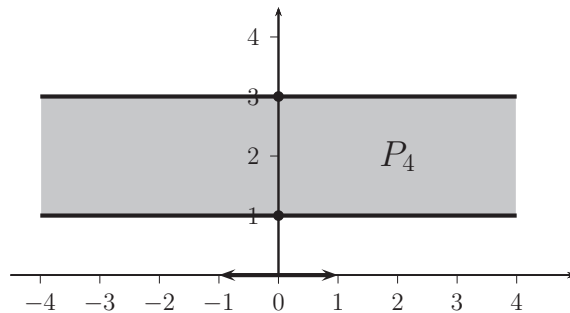
può essere rappresentato nella forma  $P_2 = \text{cono}((1,0), (1,1))$ .

Il poliedro non limitato  $P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$



può essere rappresentato nella forma  $P_3 = \text{conv}((1,2), (2,1)) + \text{cono}((1,0), (0,1))$ .

Il poliedro non limitato  $P_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_2 \leq 3\}$



può essere rappresentato nella forma  $P_4 = \text{conv}((0,1), (0,3)) + \text{cono}((1,0), (-1,0))$ , osserviamo che i punti  $(0,1)$  e  $(0,3)$  non sono vertici del poliedro  $P_4$ .  $\square$

## 2.1 GEOMETRIA DELLA PL

Il seguente teorema descrive la struttura di un poliedro  $P$  che non contiene rette, ossia con  $\text{lineal}(P) = \{0\}$ .

**Teorema 2.1.5.** *Se  $P$  è un poliedro con  $\text{lineal}(P) = \{0\}$ , allora*

$$P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P).$$

**Dimostrazione.** Per il Teorema 2.1.4 abbiamo che il poliedro  $P$  può essere scritto nella forma  $P = \text{conv}(V) + \text{rec}(P)$  con  $V = \{v^1, \dots, v^m\} \subseteq P$ . Supponiamo, che l'insieme  $V$  sia minimale, ovvero che nessun sottoinsieme  $V' \subset V$  soddisfi la relazione  $P = \text{conv}(V') + \text{rec}(P)$  e dimostriamo che  $V \subseteq \text{vert}(P)$ , cioè che i vettori  $v^1, \dots, v^m$  sono vertici di  $P$ .

Supponiamo, per assurdo, che un elemento di  $V$ , ad esempio  $v^1$ , non sia un vertice di  $P$ . Allora esistono due punti  $v'$  e  $v''$  di  $P$ , con  $v' \neq v''$ , ed esiste uno scalare  $\gamma \in (0, 1)$  tali che

$$v^1 = \gamma v' + (1 - \gamma) v''.$$

Poiché  $v'$  e  $v''$  appartengono a  $P$ , abbiamo che  $v' = w' + c'$  e  $v'' = w'' + c''$ , con  $w', w'' \in \text{conv}(V)$  e  $c', c'' \in \text{rec}(P)$ . Ora, poiché  $w'$  e  $w''$  appartengono a  $\text{conv}(V)$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} w' &= \sum_{i=1}^m \mu_i v^i, & \mu_i &\geq 0 & \sum_{i=1}^m \mu_i &= 1, \\ w'' &= \sum_{i=1}^m \rho_i v^i, & \rho_i &\geq 0 & \sum_{i=1}^m \rho_i &= 1. \end{aligned}$$

Ponendo  $\lambda_i = \gamma \mu_i + (1 - \gamma) \rho_i$  abbiamo che

$$v^1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v^i + (\gamma c' + (1 - \gamma) c'') \quad (2.3)$$

con  $\lambda_i \geq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, m$  e  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = \gamma \sum_{i=1}^m \mu_i + (1 - \gamma) \sum_{i=1}^m \rho_i = 1$ . Se fosse  $\lambda_1 < 1$ , avremmo che

$$v^1 = \sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} v^i + \frac{1}{1 - \lambda_1} (\gamma c' + (1 - \gamma) c'')$$

ovvero che  $v^1 \in \text{conv}(V \setminus \{v^1\}) + \text{rec}(P)$ , ma questo implica che

$$P = \text{conv}(V \setminus \{v^1\}) + \text{rec}(P)$$

che contraddice l'ipotesi fatta all'inizio che l'insieme  $V$  sia minimale. Pertanto, deve essere  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_i = 0$  per  $i = 2, \dots, m$ . Dalla (2.3) otteniamo che  $\gamma c' + (1 - \gamma) c'' = 0$  e quindi che

$$c'' = -\frac{\gamma}{1 - \gamma} c'.$$

Inoltre, poiché  $0 < \gamma < 1$  e per definizione  $\lambda_1 = \gamma \mu_1 + (1 - \gamma) \rho_1 = 1$  si ha  $\mu_1 = \rho_1 = 1$ . Da ciò segue  $w' = w'' = v^1$  e quindi  $v' = v^1 + c'$  e  $v'' = v^1 + c''$ . La direzione  $c'$  non può essere uguale a 0, perché altrimenti si avrebbe  $v^1 = v' = v''$  che è impossibile perché  $v'$  è diverso da  $v''$ . Abbiamo allora dimostrato che  $c'$  e  $-c'$  appartengono al cono di recessione di  $P$  e quindi che  $\text{lineal}(P)$

## 2. TEORIA DELLA PL

contiene una direzione  $c' \neq 0$ , ma questo contraddice l'ipotesi che  $\text{lineal}(P) = \{0\}$ . Pertanto ogni elemento di  $V$  è un vertice del poliedro  $P$ , ovvero che  $V \subseteq \text{vert}(P)$ .

Questo implica che  $\text{conv}(V) \subseteq \text{conv}(\text{vert}(P)) \subseteq P$  e quindi che:

$$P = \text{conv}(V) + \text{rec}(P) \subseteq \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P) \subseteq P + \text{rec}(P) = P, \quad (2.4)$$

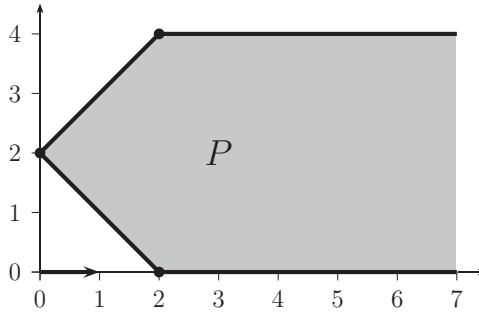
quindi gli insiemi che compaiono nella formula (2.4) coincidono tutti tra loro ed otteniamo

$$P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P).$$

□

**Esempio 2.1.10.** Consideriamo il poliedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 4, \quad -x_1 - x_2 \leq -2, \quad -x_1 + x_2 \leq 2, \quad x_2 \geq 0\}$$



Il poliedro non contiene rette, quindi  $\text{lineal}(P) = \{0\}$ . I vertici di  $P$  sono  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(2, 4)$ , mentre il cono di recessione è generato dal vettore  $(1, 0)$ . Pertanto  $P$  può essere rappresentato nella forma

$$P = \text{conv}((2, 0), (0, 2), (2, 4)) + \text{cono}((1, 0)).$$

□

Esponiamo ora alcune conseguenze del Teorema 2.1.5.

**Corollario 2.1.1.** *Per ogni poliedro  $P$  non vuoto si ha che*

$$\text{vert}(P) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \text{lineal}(P) = \{0\}.$$

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$ : supponiamo che  $\bar{x}$  sia un vertice di  $P$ . Se per assurdo  $\text{lineal}(P) \neq \{0\}$ , allora esisterebbe un vettore non nullo  $d \in \text{lineal}(P)$ , quindi i due punti  $\bar{x} + d$  e  $\bar{x} - d$  appartengono al poliedro ed inoltre

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + d) + \frac{1}{2}(\bar{x} - d)$$

contraddicendo l'ipotesi che  $\bar{x}$  sia un vertice.



## 2.2 CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ

$\Leftarrow$ : Se  $\text{lineal}(P) = \{0\}$ , allora o si ha che  $P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P)$ , con  $\text{vert}(P) \neq \emptyset$ , oppure si ha  $P = \text{rec}(P)$  ed in tal caso l'origine è un vertice di  $P$ .

□

**Corollario 2.1.2.** *Un poliedro limitato è l'involucro convesso dei suoi vertici.*

**Corollario 2.1.3.** *Se il poliedro ha i vincoli di positività sulle variabili allora*

$$P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P).$$

**Dimostrazione.** In entrambi i casi si ha  $\text{lineal}(P) = \{0\}$  poiché  $x \geq 0$ .

□

## 2.2 Condizioni di ottimalità

Un problema di PL della forma:

$$\begin{cases} \max & c^\top x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

viene chiamato problema primale in forma standard. Il valore ottimo del problema  $(\mathcal{P})$  verrà indicato con  $v(\mathcal{P})$ . Ogni problema di PL si può trasformare, in modo equivalente, in uno in forma primale standard cambiando

$$\min \quad c^\top x \qquad \text{in} \qquad -\max \quad -c^\top x,$$

e trasformando un vincolo di uguaglianza in due vincoli di disuguaglianza (uno di  $\geq$  e l'altro di  $\leq$ ) e un vincolo di  $\geq$  in uno di  $\leq$  moltiplicando per  $-1$ . Ad esempio, il problema:

$$\begin{cases} \min & 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

si può trasformare in forma primale standard nel modo seguente:

$$\begin{cases} -\max & -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq -7 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Stabiliamo ora alcune condizioni che garantiscano che un punto ammissibile di un problema di PL sia ottimo.

**Teorema 2.2.1** (Caratterizzazione elementare dell'ottimalità).

1. Se  $c \neq 0$ , allora ogni soluzione ottima di  $(\mathcal{P})$  non è interna al poliedro  $P$ .
2. Se il problema  $(\mathcal{P})$  ha due soluzioni ottime, allora ne ha infinite.
3. Le soluzioni ottime locali di  $(\mathcal{P})$  sono anche ottime globali.

**Dimostrazione.**

1. Se una soluzione ottima fosse interna al poliedro  $P$ , allora il gradiente della funzione obiettivo, cioè il vettore  $c$ , dovrebbe essere nullo.
2. Supponiamo che  $x^1$  e  $x^2$  siano due soluzioni ottime distinte di  $(\mathcal{P})$ . Allora anche ogni punto del segmento di estremi  $x^1$  e  $x^2$ , cioè  $\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$ , con  $\lambda \in (0, 1)$ , è una soluzione ottima di  $(\mathcal{P})$  in quanto

$$c^T(\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2) = \lambda c^T x^1 + (1 - \lambda) c^T x^2 = \lambda c^T x^1 + (1 - \lambda) c^T x^1 = c^T x^1.$$

Quindi se  $(\mathcal{P})$  ha almeno due soluzioni ottime distinte, allora ne ha infinite.

3. Supponiamo per assurdo che  $z$  sia una soluzione ottima locale ma non globale. Allora esiste un punto  $x \in P$  tale che  $c^T x > c^T z$ . Per un generico punto del segmento di estremi  $x$  e  $z$ , cioè

$$\lambda x + (1 - \lambda) z \quad \text{con } \lambda \in (0, 1),$$

si ha che

$$c^T(\lambda x + (1 - \lambda) z) > c^T \lambda z + c^T (1 - \lambda) z = c^T z,$$

ossia in ogni punto del segmento di estremi  $x$  e  $z$  la funzione obiettivo assume un valore maggiore che in  $z$ . Quindi  $z$  non può essere una soluzione ottima solo locale.

□

**Esempio 2.2.1.** Consideriamo il seguente problema in due variabili:

$$\begin{cases} \max & x_1 + x_2 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \end{cases} \quad (2.5)$$

Il problema può essere risolto geometricamente disegnando il poliedro ammissibile e le cosiddette linee di isogadagno (o di isocosto se il problema è di minimo), ossia le rette su cui la funzione obiettivo assume un valore costante.

Se scriviamo la funzione obiettivo nella forma  $c^T x$ , otteniamo il vettore  $c = (1, 1)^T$ . Le linee di isogadagno formano un fascio di rette di equazione

$$c^T x = x_1 + x_2 = k,$$

## 2.2 CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ

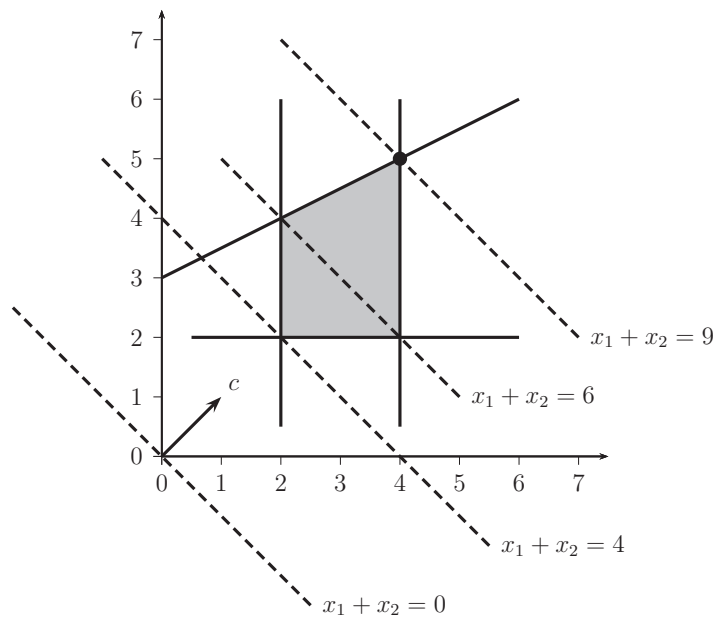


Figura 2.8: risoluzione geometrica del problema (2.5).

## 2. TEORIA DELLA PL

dove il parametro  $k \in \mathbb{R}$  rappresenta il valore della funzione obiettivo su quella retta. Le linee di isoguardagno sono tra loro parallele ed ortogonali al vettore  $c$ . Il valore  $k$  cresce nel verso indicato dal vettore  $c$ .

Per risolvere un problema di PL di massimo bisogna trovare, tra tutte le linee di isoguardagno che intersecano il poliedro ammissibile, quella che ha il valore  $k$  massimo ed una soluzione ottima è data dall'intersezione di tale linea di isoguardagno con il poliedro ammissibile.

Dalla Figura 2.8 risulta evidente che l'unica soluzione ottima del problema (2.5) è il punto (4, 5). Se il problema (2.5) fosse stato di minimo, allora l'unica soluzione ottima sarebbe stata il punto (2, 2).

Se nel problema (2.5) la funzione obiettivo fosse stata  $c^T x = -x_1 + 2x_2$ , cioè il vettore  $c = (-1, 2)^T$  parallelo al terzo vincolo, allora tutti i punti del segmento di estremi (2, 4) e (4, 5) sarebbero stati soluzioni ottime.  $\square$

### **Teorema 2.2.2.** (Fondamentale della PL)

*Supponiamo che il poliedro  $P$  sia rappresentato come*

$$P = \text{conv} \{v^1, \dots, v^m\} + \text{cono} \{e^1, \dots, e^p\}.$$

*Se il problema  $(\mathcal{P})$  ha valore ottimo finito, allora esiste  $k \in \{1, \dots, m\}$  tale che  $v^k$  è una soluzione ottima di  $(\mathcal{P})$ .*

**Dimostrazione.** Data la rappresentazione del poliedro  $P$ , abbiamo che il problema  $(\mathcal{P})$  è equivalente al seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^m \lambda_i c^T v^i + \sum_{j=1}^p \mu_j c^T e^j \\ & \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \\ & \lambda \geq 0 \\ & \mu \geq 0. \end{cases}$$

Poiché  $(\mathcal{P})$  ha ottimo finito e poiché il problema precedente ha le variabili  $\lambda$  e  $\mu$  separate nella funzione obiettivo si ha

$$c^T e^j \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, p,$$

altrimenti, se  $c^T e^j > 0$ , si potrebbe far tendere  $\mu_j$  a  $+\infty$  e la funzione obiettivo tenderebbe a  $+\infty$ . Indichiamo con  $v^k$  l'elemento di  $\{v^1, \dots, v^m\}$  in cui la funzione obiettivo assume il valore

## 2.3 TEORIA DELLA DUALITÀ

massimo. Allora per ogni  $x \in P$  otteniamo:

$$\begin{aligned}
 c^\top x &= \sum_{i=1}^m \lambda_i c^\top v^i + \sum_{j=1}^p \mu_j c^\top e^j \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \lambda_i c^\top v^i \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \max_{1 \leq i \leq m} c^\top v^i \\
 &= \left( \max_{1 \leq i \leq m} c^\top v^i \right) \sum_{i=1}^m \lambda_i \\
 &= \max_{1 \leq i \leq m} c^\top v^i \\
 &= c^\top v^k
 \end{aligned}$$

e quindi  $\max_{x \in P} c^\top x \leq c^\top v^k$ . Poiché  $v^k$  appartiene al poliedro  $P$ , si ottiene anche che

$$c^\top v^k \leq \max_{x \in P} c^\top x$$

e dunque che  $v^k$  è una soluzione ottima di  $(\mathcal{P})$ . □

Dal teorema fondamentale della PL discende il seguente risultato.

**Corollario 2.2.1.** (Fondamentale della PL)

*Se il problema  $(\mathcal{P})$  ha valore ottimo finito e  $\text{lineal}(P) = \{0\}$ , allora esiste un vertice ottimo.*

Possono esservi situazioni in cui il problema ha ottimo finito senza avere vertici ottimi come mostra il seguente esempio.

**Esempio 2.2.2.** Basta considerare il problema

$$\begin{cases} \max & x_1 + x_2 \\ 0 \leq & x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

in cui il poliedro non contiene vertici ed il valore ottimo è 1 (tutti i punti della retta  $x_1 + x_2 = 1$  sono ottimi). □

## 2.3 Teoria della dualità

Al problema primale in forma standard

$$\begin{cases} \max & c^\top x \\ x \in & P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

associamo il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min & y^\top b \\ y \in & D = \{y \in \mathbb{R}^m : y^\top A = c^\top, y \geq 0\} \end{cases} \quad (\mathcal{D})$$

## 2. TEORIA DELLA PL

che sarà chiamato problema duale in forma standard. Il valore ottimo del problema  $(\mathcal{D})$  verrà indicato con  $v(\mathcal{D})$ .

Poiché, come detto, ogni problema di PL si può trasformare in un problema primale standard di tipo  $(\mathcal{P})$ , allora ogni problema di PL ha un suo problema duale. Osserviamo che ogni problema di PL si può trasformare in un duale standard di tipo  $(\mathcal{D})$ . Infatti una disuguaglianza

$$A_i x \leq b_i$$

si può trasformare nell'uguaglianza

$$A_i x + s_i = b_i,$$

aggiungendo i vincoli  $s_i \geq 0$ , dove le  $s_i$  sono dette variabili di scarto. Inoltre ogni numero reale è la differenza di due numeri non negativi, e quindi si può sempre introdurre il vincolo di positività sulle variabili spezzando ogni variabile non vincolata in segno nella differenza di due variabili vincolate in segno, ovvero si porre

$$x = x^+ - x^- \quad \text{con} \quad x^+ \geq 0, \quad \text{e} \quad x^- \geq 0.$$

Le regole elencate in Figura 2.9 servono costruire il duale di un generico problema di PL senza passare dalla sua trasformazione alla forma primale standard.

**Esempio 2.3.1.** Consideriamo il problema primale

$$\begin{cases} \max & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ & 6x_1 - x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - 5x_3 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ & x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Essendo il primale un problema di massimo, il duale è un problema di minimo. Vediamo quali sono le variabili duali ed i relativi costi:

| Primale                 | Duale                                      |
|-------------------------|--|
| vincolo: $\dots \geq 1$ | variabile $y_1 \leq 0$ di costo 1          |
| vincolo: $\dots \leq 5$ | variabile $y_2 \geq 0$ di costo 5          |
| vincolo: $\dots = 10$   | variabile $y_3 \in \mathbb{R}$ di costo 10 |

Quindi la funzione obiettivo duale è  $y_1 + 5y_2 + 10y_3$ . Costruiamo ora i vincoli duali:

| Primale                                      | Duale                                |
|--|--------------------------------------|
| variabile $x_1 \in \mathbb{R}$ di costo 3    | vincolo: $6y_1 + 2y_2 + 1y_3 = 3$    |
| variabile $x_2 \in \mathbb{R}$ di costo $-4$ | vincolo: $-1y_1 + 0y_2 + 3y_3 = -4$  |
| variabile $x_3 \geq 0$ di costo 2            | vincolo: $0y_1 - 5y_2 + 4y_3 \geq 2$ |
| vincolo: $6x_1 - 1x_2 + 0x_3 \geq 1$         |                                      |
| vincolo: $2x_1 + 0x_2 - 5x_3 \leq 5$         |                                      |
| vincolo: $1x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10$           |                                      |

## Costruzione del duale

- Se il primale è un problema di massimo (minimo), allora il duale è un problema di minimo (massimo).
- Ad ogni vincolo primale  $A_i x = b_i$  è associata una variabile duale  $y_i$  non vincolata in segno di costo uguale a  $b_i$ .
- Se il primale è un problema di massimo (minimo), allora ad ogni vincolo primale  $A_i x \leq b_i$  è associata una variabile duale  $y_i \geq 0$  ( $y_i \leq 0$ ), mentre ad ogni vincolo primale  $A_i x \geq b_i$  è associata una variabile duale  $y_i \leq 0$  ( $y_i \geq 0$ ). Il costo di  $y_i$  è uguale a  $b_i$ .
- Ad ogni variabile primale  $x_i$  non vincolata in segno, è associato un vincolo di uguaglianza del problema duale. Nel vincolo duale, i coefficienti delle variabili sono i coefficienti con cui la variabile  $x_i$  compare nei vincoli primali ed il termine noto è il costo di  $x_i$ .
- Se il duale è un problema di minimo (massimo), allora ad ogni variabile primale  $x_i \geq 0$  è associato un vincolo di tipo  $\geq$  ( $\leq$ ), mentre ad ogni variabile primale  $x_i \leq 0$  è associato un vincolo di tipo  $\leq$  ( $\geq$ ). Nel vincolo duale, i coefficienti delle variabili sono i coefficienti con cui la variabile  $x_i$  compare nei vincoli primali ed il termine noto è il costo di  $x_i$ .

Figura 2.9: costruzione del duale di un generico problema di PL.

Riassumendo, il duale del problema (2.6) è

$$\begin{cases} \min & y_1 + 5y_2 + 10y_3 \\ & 6y_1 + 2y_2 + y_3 = 3 \\ & -y_1 + 3y_3 = -4 \\ & -5y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \geq 0 \end{cases}$$

□

## 2. TEORIA DELLA PL

Mostriamo che il duale del duale è il primale.

**Teorema 2.3.1.** *Il duale di  $(\mathcal{D})$  è  $(\mathcal{P})$ .*

**Dimostrazione.** Riscriviamo il problema  $(\mathcal{D})$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (\mathcal{D})$$

Applichiamo le regole viste in precedenza per costruire il duale di  $(\mathcal{D})$ .

Il duale di  $(\mathcal{D})$  deve essere un problema di massimo perché  $(\mathcal{D})$  è un problema di minimo. Vediamo ora quali sono le variabili ed i vincoli del duale di  $(\mathcal{D})$ . Ad ogni vincolo di uguaglianza di  $(\mathcal{D})$ :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \text{per } j = 1, \dots, n$$

corrisponde, nel duale di  $(\mathcal{D})$ , una variabile  $x_j$  non vincolata in segno di costo  $c_j$  (termine noto del vincolo precedente).

Abbiamo detto che il duale di  $(\mathcal{D})$  è un problema di massimo e quindi ad ogni variabile  $y_i \geq 0$  di  $(\mathcal{D})$  corrisponde, nel duale di  $(\mathcal{D})$ , un vincolo di tipo  $\leq$  in cui i coefficienti delle variabili  $x_j$  sono i coefficienti con cui la variabile  $y_i$  compare nei vincoli

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \text{per } j = 1, \dots, n,$$

ossia  $a_{ij}$ , ed il termine noto del vincolo di  $\leq$  è il costo di  $y_i$ , cioè  $b_i$ . Perciò ad ogni variabile  $y_i \geq 0$ , per  $i = 1, \dots, m$ , corrisponde nel duale di  $(\mathcal{D})$  il vincolo

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{per } i = 1, \dots, m,$$

Pertanto il duale di  $(\mathcal{D})$  si può scrivere come

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

□

Per studiare le relazioni che intercorrono tra i problemi  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{D})$ , ci saranno utili i seguenti teoremi.



**Teorema 2.3.2.** (Separazione)

Dato un poliedro  $K \in \mathbb{R}^n$  ed un punto  $z \notin K$ , esistono un vettore  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  ed uno scalare  $\beta \in \mathbb{R}$  tali che l'iperpiano  $\alpha^T x = \beta$  separa  $z$  da  $K$ , cioè

$$\begin{aligned} \alpha^T z &> \beta, \\ \alpha^T x &< \beta \quad \forall x \in K. \end{aligned}$$

**Dimostrazione.** Consideriamo la funzione che associa ad ogni punto  $x$  del poliedro  $K$  la sua distanza da  $z$ :

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x - z\|. \end{aligned}$$

Tale funzione ammette un punto di minimo su  $K$ , che indichiamo con  $w$ , cioè  $w$  è il punto di  $K$  di minima distanza da  $z$ :

$$w \in K, \quad \|w - z\| \leq \|x - z\| \quad \forall x \in K.$$

Dimostriamo ora che un iperpiano che separa  $z$  da  $K$  è dato dall'iperpiano ortogonale al segmento di estremi  $z$  e  $w$  passante per il suo punto medio (vedi Figura 2.10).

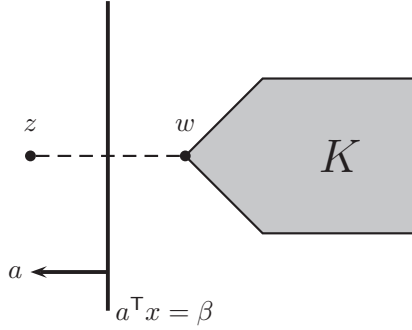


Figura 2.10: iperpiano di separazione tra il punto  $z$  ed il poliedro  $K$

Infatti, definiamo

$$\alpha = z - w, \quad \beta = \frac{1}{2} (z^T z - w^T w) = \frac{1}{2} (z - w)^T (z + w).$$

Dalle definizioni di  $\alpha$  e  $\beta$  si ottiene:

$$\alpha^T z - \beta = z^T z - w^T z - \frac{1}{2} z^T z + \frac{1}{2} w^T w = \frac{1}{2} z^T z + \frac{1}{2} w^T w - w^T z = \frac{1}{2} (z - w)^T (z - w) = \frac{1}{2} \|z - w\|^2.$$

Poiché  $z \notin K$  e  $w \in K$ , si ha che  $z \neq w$ , quindi  $\|z - w\| > 0$ . Pertanto  $\alpha^T z > \beta$ .

## 2. TEORIA DELLA PL

Rimane da dimostrare che  $\alpha^T x < \beta$  per ogni  $x \in K$ . Supponiamo per assurdo che esista un punto  $x \in K$  tale che  $\alpha^T x \geq \beta$ , allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha^T x - \beta \\ &= (z - w)^T x - \frac{1}{2}(z - w)^T (z + w) \\ &= (z - w)^T \left( x - \frac{1}{2}(z + w) \right) \\ &= (z - w)^T \left( x - w - \frac{1}{2}(z - w) \right) \\ &= (z - w)^T (x - w) - \frac{1}{2}\|z - w\|^2, \end{aligned}$$

e quindi

$$(z - w)^T (x - w) \geq \frac{1}{2}\|z - w\|^2 > 0.$$

Consideriamo i punti del segmento di estremi  $w$  e  $x$ :

$$s(\lambda) = w + \lambda(x - w), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Poiché  $w$  e  $x$  appartengono a  $K$  e  $K$  è un insieme convesso, anche i punti  $s(\lambda)$  appartengono a  $K$ . Definiamo la funzione

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \|s(\lambda) - z\|^2 \\ &= (s(\lambda) - z)^T (s(\lambda) - z) \\ &= (w - z + \lambda(x - w))^T (w - z + \lambda(x - w)) \\ &= \lambda^2 \|x - w\|^2 + 2\lambda(w - z)^T (x - w) + \|w - z\|^2 \end{aligned}$$

La derivata prima di  $f$  è

$$f'(\lambda) = 2\lambda \|x - w\|^2 + 2(w - z)^T (x - w),$$

ed in particolare per  $\lambda = 0$  si ha

$$f'(0) = 2(w - z)^T (x - w) < 0.$$

Quindi la funzione  $f$  è decrescente in un intorno di 0, ossia esiste  $\bar{\lambda} > 0$  tale che  $f(\bar{\lambda}) < f(0)$ , ossia

$$\|s(\bar{\lambda}) - z\|^2 < \|s(0) - z\|^2 = \|w - z\|^2.$$

Ciò significa che il punto  $s(\bar{\lambda}) \in K$  è più vicino a  $z$  rispetto a  $w$ , ma questo contraddice la definizione di  $w$ .  $\square$

### **Teorema 2.3.3** (Farkas).

Data una matrice  $A$  di ordine  $m \times n$  ed un vettore  $c \in \mathbb{R}^n$ , i due sistemi

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

e

$$\begin{cases} A d \leq 0 \\ c^T d > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

sono in alternativa, cioè (2.7) ammette soluzioni se e solo se (2.8) è impossibile.

### 2.3 TEORIA DELLA DUALITÀ

**Dimostrazione.** Supponiamo che il sistema (2.7) ammetta soluzioni e dimostriamo che il sistema (2.8) è impossibile. Poiché (2.7) ammette soluzioni, esiste  $\bar{y} \geq 0$  tale che  $\bar{y}^\top A = c^\top$ . Inoltre se  $Ad \leq 0$ , allora

$$c^\top d = \underbrace{\bar{y}^\top}_{\geq 0} \underbrace{Ad}_{\leq 0} \leq 0,$$

ossia il sistema (2.8) è impossibile.

Supponiamo ora che il sistema (2.7) sia impossibile e dimostriamo che esiste una soluzione del sistema (2.8). Indichiamo con  $A_1, \dots, A_m$  le righe della matrice  $A$  e consideriamo il cono poliedrico generato da tali vettori:

$$K = \text{cono}(A_1, \dots, A_m).$$

Poiché (2.7) è impossibile, il vettore  $c \notin K$  e quindi, per il teorema di separazione, esistono  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{aligned} a^\top c &> \beta, \\ a^\top x &< \beta \quad \forall x \in K. \end{aligned}$$

Poiché l'origine  $0 \in K$ , si ha che  $\beta > 0$ , quindi  $c^\top a = a^\top c > \beta > 0$ . Inoltre ogni elemento  $x \in K$  è tale che  $x^\top = y^\top A$  con  $y \geq 0$ , perciò

$$\beta > a^\top x = x^\top a = y^\top A a \quad \forall y \geq 0,$$

quindi si deve avere  $Aa \leq 0$ . Riassumendo abbiamo ottenuto che

$$Aa \leq 0, \quad c^\top a > 0,$$

ossia che  $a$  è una soluzione del sistema (2.8). □

Possiamo dare un'interpretazione geometrica del teorema di Farkas. Dire che il sistema (2.7) ha una soluzione  $y$  equivale a dire che il vettore  $c$  appartiene al cono generato dalle righe  $A_1, \dots, A_m$  della matrice  $A$ , dove  $y_i$  sono i coefficienti della combinazione conica. Infatti:

$$c^\top = y^\top A = \sum_{i=1}^m y_i A_i, \quad \text{con } y_i \geq 0,$$

equivale a dire che

$$c \in \text{cono}(A_1, \dots, A_m).$$

D'altra parte, una soluzione  $d$  del sistema (2.8) è un elemento del cono  $Ax \leq 0$  che ha prodotto scalare positivo con  $c$ , ossia forma un angolo acuto con il vettore  $c$ . Nella Figura 2.11 sono illustrati i due casi possibili.

Osserviamo inoltre che le soluzioni del sistema (2.7) sono le soluzioni duali ammissibili, mentre le soluzioni del sistema (2.8) sono le direzioni  $d$  di crescita per il primale ( $c^\top d > 0$ ) che appartengono al cono di recessione del poliedro primale ( $Ad \leq 0$ ). Da questo fatto, ricaviamo che i problemi primale e duale hanno lo stesso valore ottimo quando è vuoto o il poliedro primale o quello duale.

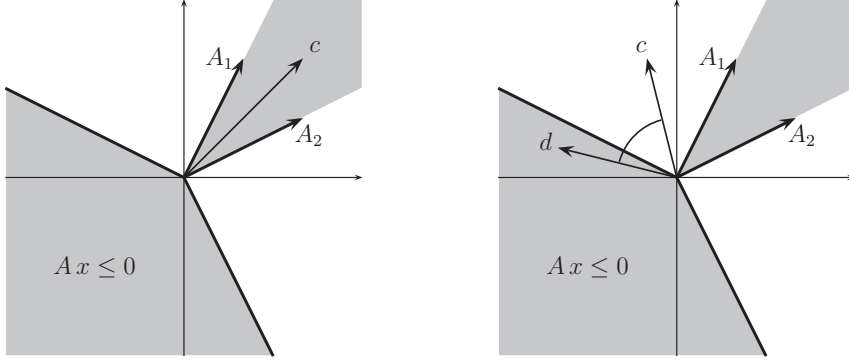


Figura 2.11: a sinistra: il sistema (2.7) ammette una soluzione ed il sistema (2.8) è impossibile; a destra: il sistema (2.7) è impossibile ed il sistema (2.8) ammette una soluzione  $d$ .

**Corollario 2.3.1.**

1. Se  $P \neq \emptyset$  e  $D = \emptyset$ , allora  $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D}) = +\infty$ .
2. Se  $P = \emptyset$  e  $D \neq \emptyset$ , allora  $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D}) = -\infty$ .

**Dimostrazione.**

1. Se il poliedro primale non è vuoto, allora esiste un vettore  $\bar{x}$  tale che  $A\bar{x} \leq b$ . Inoltre se il poliedro duale  $D$  è vuoto, cioè il sistema (2.7) è impossibile, allora, per il teorema di Farkas, esiste una direzione di recessione  $\bar{d}$  per il primale tale che  $c^T \bar{d} > 0$ . Calcolando la funzione obiettivo primale lungo la semiretta uscente da  $\bar{x}$  di direzione  $\bar{d}$ , otteniamo

$$c^T(\bar{x} + \lambda \bar{d}) = c^T \bar{x} + \lambda c^T \bar{d} \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

quindi il valore ottimo del primale è  $+\infty$ . Per convenzione, il minimo di una funzione su un insieme vuoto è posto uguale a  $+\infty$ , per cui i valori ottimi di  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{D})$  sono uguali a  $+\infty$ .

2. Nel caso in cui  $P = \emptyset$  e  $D \neq \emptyset$ , si ottiene la tesi interpretando il problema primale come il duale del problema duale.

□

Nel caso in cui i poliedri primale e duale siano entrambi non vuoti, le funzioni obiettivo primali e duali soddisfano la seguente relazione.

### 2.3 TEORIA DELLA DUALITÀ

**Teorema 2.3.4.** (dualità debole)

Se i poliedri  $P$  e  $D$  sono non vuoti, allora

$$c^\top x \leq y^\top b \quad \forall x \in P, \quad \forall y \in D.$$

**Dimostrazione.** Per ogni  $x \in P$  e  $y \in D$  si ha

$$\underbrace{c^\top}_{=y^\top A} x = \underbrace{y^\top}_{\geq 0} \underbrace{Ax}_{\leq b} \leq y^\top b.$$

□

Il teorema della dualità debole ci dice che il valore della funzione obiettivo del duale calcolato in un qualsiasi punto ammissibile del duale costituisce un confine superiore per l'ottimo del primale. Viceversa il valore della funzione obiettivo del primale calcolato in un qualsiasi punto ammissibile del primale costituisce un confine inferiore per l'ottimo del duale. Quindi, quando i poliedri primale e duale sono entrambi non vuoti, i valori ottimi primale e duale sono finiti ed il valore ottimo primale è minore o uguale al valore ottimo duale. In realtà vale un risultato più forte.

**Teorema 2.3.5.** (Dualità forte)

Se i poliedri  $P$  e  $D$  sono non vuoti, allora

$$-\infty < v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D}) < +\infty \quad (2.9)$$

**Dimostrazione.** Dal teorema della dualità debole segue che il problema  $(\mathcal{P})$  ha valore ottimo finito e quindi, per il teorema fondamentale della PL, esiste una soluzione ottima  $\bar{x}$ . Consideriamo l'insieme dei vincoli attivi in  $\bar{x}$ :

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \{i : A_i \bar{x} = b_i\}$$

ed indichiamo con  $A_{\mathcal{A}(\bar{x})}$  la sottomatrice di  $A$  ottenuta scegliendo le righe  $A_i$  con  $i \in \mathcal{A}(\bar{x})$ . Consideriamo un vettore  $d \in \mathbb{R}^n$  tale che  $A_{\mathcal{A}(\bar{x})} d \leq 0$ . Se per ogni  $i \notin \mathcal{A}(\bar{x})$  si ha che  $A_i d \leq 0$ , cioè  $d$  è una direzione di recessione per il poliedro  $P$ , allora

$$\bar{x} + \lambda d \in P \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Se, invece, esiste almeno un indice  $i \notin \mathcal{A}(\bar{x})$  tale che  $A_i d > 0$ , allora

$$\bar{x} + \lambda d \in P \quad \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}],$$

dove

$$\bar{\lambda} = \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i d}, \quad i \notin \mathcal{A}(\bar{x}), \quad A_i d > 0 \right\} > 0.$$

In entrambi i casi citati, esistono punti ammissibili del tipo  $\bar{x} + \lambda d$  con  $\lambda > 0$ , ossia sulla semiretta uscente da  $\bar{x}$  di direzione  $d$ . Poiché  $\bar{x}$  è una soluzione ottima di  $(\mathcal{P})$ , la direzione  $d$  non può essere una direzione di crescita per la funzione obiettivo primale, cioè deve valere  $c^\top d \leq 0$ . Quindi abbiamo dimostrato la seguente implicazione:

$$A_{\mathcal{A}(\bar{x})} d \leq 0 \implies c^\top d \leq 0,$$

## 2. TEORIA DELLA PL

ossia il sistema

$$\begin{cases} A_{\mathcal{A}(\bar{x})} d \leq 0 \\ c^T d > 0 \end{cases}$$

è impossibile. Allora, per il teorema di Farkas, il sistema

$$\begin{cases} u^T A_{\mathcal{A}(\bar{x})} = c^T \\ u \geq 0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione  $\bar{u}$ . Definiamo il vettore  $\bar{y}$  come:

$$\bar{y}_i = \begin{cases} \bar{u}_i & \text{se } i \in \mathcal{A}(\bar{x}), \\ 0 & \text{se } i \notin \mathcal{A}(\bar{x}). \end{cases}$$

Allora il vettore  $\bar{y}$  appartiene al poliedro duale  $D$ , infatti:

$$\bar{y}^T A = \bar{u}^T A_{\mathcal{A}(\bar{x})} = c^T, \quad \bar{y} \geq 0.$$

Inoltre il valore della funzione obiettivo duale in  $\bar{y}$  coincide con il valore della funzione obiettivo primale in  $\bar{x}$ , infatti:

$$\bar{y}^T b = \bar{u}^T b_{\mathcal{A}(\bar{x})} = \bar{u}^T A_{\mathcal{A}(\bar{x})} \bar{x} = c^T \bar{x}.$$

Quindi, per il teorema della dualità debole,  $\bar{y}$  è una soluzione ottima di  $(\mathcal{D})$  ed i valori ottimi di  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{D})$  coincidono.  $\square$

Grazie al Corollario 2.3.1 ed al teorema della dualità forte, si può dire che il primale ed il duale hanno lo stesso valore ottimo quando almeno uno tra il poliedro primale e quello duale sia non vuoto. Esistono problemi di PL che hanno poliedro primale e duale entrambi vuoti come mostra il seguente esempio.

**Esempio 2.3.2.** Nella seguente coppia di problemi primale/duale:

$$\begin{cases} \max & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 0 \\ & -x_1 - x_2 \leq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \min & -y_2 \\ & y_1 - y_2 = 1 \\ & y_1 - y_2 = 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

i poliedri primale e duale sono entrambi vuoti.  $\square$

Riassumiamo nella tabella seguente le relazioni tra i valori ottimi primale e duale:

|                    | $D \neq \emptyset$                               | $D = \emptyset$  |
|--------------------|--|--|
| $P \neq \emptyset$ | $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D}) \in \mathbb{R}$ | $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D}) = +\infty$              |
| $P = \emptyset$    | $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{D}) = -\infty$      | $v(\mathcal{P}) = -\infty$<br>$v(\mathcal{D}) = +\infty$ |

Una conseguenza molto utile nelle applicazioni del teorema di dualità forte è la seguente.

## 2.3 TEORIA DELLA DUALITÀ

**Teorema 2.3.6.** (Scarti complementari)

Supponiamo che  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  siano ammissibili rispettivamente per i problemi  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{D})$ . Allora si ha:

$$\bar{x}, \bar{y} \text{ sono ottime} \iff \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0.$$

Quando  $y^T(b - A\bar{x}) = 0$  si dice che  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono in scarti complementari.

**Dimostrazione.** Per il teorema della dualità forte due soluzioni ammissibili  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono ottime se e solo se hanno lo stesso valore:

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} = \bar{y}^T b,$$

cioè

$$y^T(b - A\bar{x}) = 0.$$

□

Essendo  $\bar{y}$  e  $b - A\bar{x}$  due vettori non negativi per l'ammissibilità di  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , la condizione  $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$  è equivalente alle condizioni

$$\bar{y}_i (b_i - A_i \bar{x}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Il teorema degli scarti complementari assume una forma espressiva nel caso di problemi in cosiddetta forma simmetrica. I problemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \min y^T b \\ y^T A \geq c^T \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

sono uno il duale dell'altro e sono chiamati coppia duale simmetrica. Mostriamo allora che  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  ammissibili, sono soluzioni ottime se e solo se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 \\ (\bar{y}^T A - c^T) \bar{x} = 0 \end{array} \right. .$$

Infatti i due poliedri si possono scrivere in forma primale e duale standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} A \\ -I \end{array} \right) x \leq \left( \begin{array}{c} b \\ 0 \end{array} \right), \\ y, z \geq 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (y, z)^T \left( \begin{array}{c} A \\ -I \end{array} \right) = c^T \\ y, z \geq 0. \end{array} \right.$$

e il teorema degli scarti complementari diventa:

$$0 = (\bar{y}, \bar{z})^T (b - A\bar{x}, \bar{x}) = \bar{y}^T (b - A\bar{x}) + \bar{z}^T \bar{x}.$$

Ovvero, tenuto conto della positività dei vettori ed essendo  $\bar{z}^T = \bar{y}^T A - c^T$ , si ha:

$$\bar{y}^T (b - A\bar{x}) = (\bar{y}^T A - c^T) \bar{x} = 0.$$

**Esempio 2.3.3.** Sia data la seguente coppia di problemi primale/duale:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \min & y_1 - y_2 - y_3 \\ & y_1 + 2y_3 - y_4 = 2 \\ & y_2 + y_3 + 2y_4 = 1 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Supponiamo di sapere che  $\bar{x} = (0, -1)$  sia una soluzione ottima per il primale. Troviamo una soluzione ottima  $\bar{y}$  del duale applicando il teorema degli scarti complementari. Poiché il primo ed il quarto vincolo primale non sono soddisfatti con l'uguale in  $\bar{x}$ , per il teorema degli scarti complementari si ha che  $\bar{y}_1 = 0$  e  $\bar{y}_4 = 0$ , infatti:

$$0 = \bar{y}_1 (b_1 - A_1 \bar{x}) = \bar{y}_1 (1 - 0) = \bar{y}_1, \quad 0 = \bar{y}_4 (b_4 - A_4 \bar{x}) = \bar{y}_4 (0 - (-2)) = 2\bar{y}_4.$$

Allora imponendo l'ammissibilità duale per  $\bar{y}$  si ottiene:

$$\begin{cases} 2\bar{y}_3 = 2 \\ \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{y}_3 = 1 \\ \bar{y}_2 = 0. \end{cases}$$

Pertanto il vettore  $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$  è ottimo per il duale. □

**Esempio 2.3.4.** Sia data la stessa coppia di problemi primale/duale dell'esempio precedente. Supponiamo di sapere che  $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$  è ottima per il duale. Per il teorema degli scarti complementari le soluzioni ottime del primale sono le soluzioni ammissibili che sono in scarti complementari con  $\bar{y}$ . Poiché  $\bar{y}_3 > 0$ , si avrà  $b_3 - A_3 x = 0$ , cioè  $2x_1 + x_2 = -1$ . Parametizziamo i punti di tale retta come  $(\alpha, -1 - 2\alpha)$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Le soluzioni ottime del primale sono quindi le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq -1 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 0. \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \alpha \leq 1 \\ -1 - 2\alpha \leq -1 \\ -\alpha + 2(-1 - 2\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema rispetto ad  $\alpha$  si ottiene  $\alpha \in [0, 1]$ . Quindi le soluzioni ottime del primale sono tutti i punti appartenenti al segmento di estremi  $(0, -1)$  e  $(1, -3)$ . □

La dualità tra spazi è uno dei concetti più astratti della matematica. Nonostante ciò, è anche uno dei più utili nelle applicazioni reali. Oltre ad essere, ovviamente, di fondamentale importanza per la teoria matematica stessa, come abbiamo appena visto, è di estrema utilità per ottenere informazioni importanti e non intuitive sul problema reale come nel seguente esempio.



**Esempio 2.3.5.** In questo esempio di problema di produzione mostreremo come la soluzione del problema duale può dare informazioni sul problema di partenza.

Un'azienda vuole produrre due diversi tipi di acciaio (1 e 2) avendo a disposizione due qualità di minerali di ferro (A e B) rispettivamente nelle quantità  $b_1$  e  $b_2$  kg. Per produrre un kg dell'acciaio 1 sono necessari  $a_{11}$  e  $a_{21}$  kg rispettivamente di A e B; mentre per produrre un kg dell'acciaio 2 sono necessari  $a_{12}$  e  $a_{22}$  kg rispettivamente di A e B. Il ricavo unitario per 1 e 2 è rispettivamente di  $c_1$  e  $c_2$  euro. L'azienda vuole determinare la produzione di 1 e 2 in modo da massimizzare il ricavo totale. Tale problema può essere formulato come un problema di PL (in forma primale)

$$\begin{cases} \max & c^\top x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

dove  $x = (x_1, x_2)$  rappresenta la strategia produttiva. Tale problema può vedersi come una “trasformazione T” del vettore  $b$  nel vettore  $(\bar{x}, \bar{c})$  (cioè produzione ottimale, massimo ricavo), essendo fissa la matrice “tecnologica”  $A$ . L'industria può porsi un problema alternativo: “se invece di trasformare i minerali disponibili  $b$  in  $(\bar{x}, \bar{c})$ , li vendessi, potrei avere un vantaggio?”

Tale vantaggio si verificherebbe, se e solo se esistessero due mercati, uno per l'acciaio 1, ed uno per l'acciaio 2, nei quali venissero praticati i prezzi unitari  $y_1$  e  $y_2 \geq 0$ , tali che

$$\begin{aligned} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} &\geq c_1, \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} &\geq c_2. \end{aligned}$$

La prima relazione significa che il ricavo che otterrei, vendendo quanto occorre per produrre un kg dell'acciaio 1, non è inferiore al ricavo che ottengo vendendo un kg dello stesso acciaio; la seconda relazione si interpreta in modo analogo. Osserviamo che, essendo i prezzi  $y_1$  e  $y_2$  ipotetici, possiamo sempre supporli sufficientemente grandi, e con tali prezzi il vantaggio ovviamente esisterebbe. Allora tale analisi ipotetica acquista senso, se e solo se, tra tutti i prezzi ipotetici che rendono vantaggiosa la non esecuzione della trasformazione T, ottengo quelli che rendono minimo il ricavo: tale problema è esattamente il duale di (2.10), ossia

$$\begin{cases} \min & y^\top b \\ & y^\top A \geq c^\top \\ & y \geq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Dalla teoria sulla dualità si ha che il minimo ricavo che si otterrebbe vendendo i minerali, a prezzi “vantaggiosi” nel senso stabilito in precedenza, è uguale al massimo ricavo che si ottiene vendendo l'acciaio 1 e 2 prodotti con gli stessi minerali. Questa analisi viene chiamata anche “analisi dei prezzi ombra”.  $\square$

## 2.4 Algebra della PL

Scopo di questo paragrafo è di dare una caratterizzazione algebrica del concetto geometrico di vertice di un poliedro, introdotto nel paragrafo 2.1. Supponiamo di avere una coppia primale/duale di problemi di PL,  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{D})$ .

Se il rango di  $A$  è minore di  $n$ , allora il sistema lineare  $Ax = 0$  ammette infinite soluzioni non nulle. Per il Teorema 2.1.2 ciascuna di tali soluzioni è una direzione di linealità del poliedro primale  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ . Quindi, se il rango di  $A$  è minore di  $n$ , si ha che  $\text{lineal}(P) \neq \{0\}$ , che equivale a dire, per il Corollario 2.1.1, che il poliedro  $P$  non contiene vertici.

Se, invece, il rango di  $A$  è uguale a  $n$ , allora l'unica soluzione del sistema  $Ax = 0$  è la soluzione nulla, ossia  $\text{lineal}(P) = \{0\}$ , che equivale a dire che  $P$  contiene vertici. In tal caso, la matrice  $A$  contiene una sottomatrice quadrata  $n \times n$  invertibile.

### Definizione 2.4.1. (Base)

Chiameremo *base* un insieme  $B$  di  $n$  indici di riga,  $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ , tale che la sottomatrice  $A_B$ , ottenuta da  $A$  estraendo le righe  $A_i$  con indici  $i \in B$ , sia invertibile, cioè  $\det(A_B) \neq 0$ . La matrice  $A_B$  si chiamerà matrice di base, mentre indicheremo con  $N$  l'insieme degli indici di riga che non appartengono a  $B$ .

Dalla partizione degli  $m$  indici di riga in  $B$  e  $N$  si ha l'analoga partizione per i vettori  $b$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  e per la matrice  $A$ :

$$b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix}.$$

Data una base  $B$ , definiamo:

**Soluzione di base primale:**  $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$

**Soluzione di base duale:**  $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$  dove  $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$ ,  $\bar{y}_N = 0$ .

Una soluzione di base (primale o duale) può essere ammissibile o non ammissibile, degenerare o non degenerare secondo il seguente schema:

|                 | $\bar{x}$                                       | $\bar{y}$                                   |
|-----------------|---|---|
| ammissibile     | per ogni $i \in N$ si ha $A_i \bar{x} \leq b_i$ | per ogni $i \in B$ si ha $\bar{y}_i \geq 0$ |
| non ammissibile | esiste $i \in N$ tale che $A_i \bar{x} > b_i$   | esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i < 0$   |
| degenerare      | esiste $i \in N$ tale che $A_i \bar{x} = b_i$   | esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i = 0$   |
| non degenerare  | per ogni $i \in N$ si ha $A_i \bar{x} \neq b_i$ | per ogni $i \in B$ si ha $\bar{y}_i \neq 0$ |

**Esempio 2.4.1.** Consideriamo la seguente coppia primale/duale di problemi di PL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max -x_1 \\ -x_1 \leq -2 \\ -x_1 \leq -4 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq -2 \\ -x_1 - x_2 \leq -6 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \min -2y_1 - 4y_2 + 6y_3 + 4y_4 - 2y_5 - 6y_6 \\ -y_1 - y_2 + y_3 - y_6 = -1 \\ y_4 - y_5 - y_6 = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Scrivendo il problema primale in forma standard  $\left\{ \begin{array}{l} \max c^\top x \\ Ax \leq b \end{array} \right.$  otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la base  $B_1 = \{3, 5\}$ . La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La soluzione di base primale è

$$\bar{x}^1 = A_{B_1}^{-1} b_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'insieme degli indici non di base è  $N_1 = \{1, 2, 4, 6\}$ . Vediamo se  $\bar{x}^1$  è ammissibile:

$$b_{N_1} - A_{N_1} \bar{x}^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché tutte le componenti del vettore  $b_{N_1} - A_{N_1} \bar{x}^1$  degli scarti sono positive, si ottiene che  $\bar{x}^1$  è ammissibile e non degenera.

La soluzione di base duale relativa alla base  $B_1$  è:

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} \bar{y}_{B_1}^1 \\ \bar{y}_{N_1}^1 \end{pmatrix}, \quad (\bar{y}_{B_1}^1)^\top = c^\top A_{B_1}^{-1} = (-1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1, 0), \quad \bar{y}_{N_1}^1 = 0,$$

ossia  $\bar{y}^1 = (0, 0, -1, 0, 0, 0)$ . Poiché una componente di base è negativa e l'altra è nulla, si ha che  $\bar{y}^1$  è non ammissibile e degenera.

## 2. TEORIA DELLA PL

Consideriamo ora un'altra base:  $B_2 = \{5, 6\}$ . La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione di base primale è

$$\bar{x}^2 = A_{B_2}^{-1} b_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'insieme degli indici non di base è  $N_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ . Vediamo se  $\bar{x}^2$  è ammissibile:

$$b_{N_2} - A_{N_2} \bar{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le componenti del vettore degli scarti sono tutte positive tranne una che è nulla, quindi  $\bar{x}^2$  è ammissibile e degenere.

La soluzione di base duale relativa alla base  $B_2$  è:

$$\bar{y}^2 = \begin{pmatrix} \bar{y}_{B_2}^2 \\ \bar{y}_{N_2}^2 \end{pmatrix}, \quad (\bar{y}_{B_2}^2)^\top = c^\top A_{B_2}^{-1} = (-1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 1), \quad \bar{y}_{N_2}^2 = 0,$$

ossia  $\bar{y}^2 = (0, 0, 0, 0, -1, 1)$ . Poiché una componente di base è negativa e l'altra è positiva, si ha che  $\bar{y}^2$  è non ammissibile e non degenere.

Consideriamo la base  $B_3 = \{1, 5\}$ . La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_{B_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{B_3}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La soluzione di base primale è

$$\bar{x}^3 = A_{B_3}^{-1} b_{B_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'insieme degli indici non di base è  $N_3 = \{2, 3, 4, 6\}$ . Vediamo se  $\bar{x}^3$  è ammissibile:

$$b_{N_3} - A_{N_3} \bar{x}^3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le componenti del vettore degli scarti sono due positive e due negative, quindi  $\bar{x}^3$  è non ammissibile e non degenere.

La soluzione di base duale relativa alla base  $B_3$  è:

$$\bar{y}^3 = \begin{pmatrix} \bar{y}_{B_3}^3 \\ \bar{y}_{N_3}^3 \end{pmatrix}, \quad (\bar{y}_{B_3}^3)^\top = c^\top A_{B_3}^{-1} = (-1, 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1, 0), \quad \bar{y}_{N_3}^3 = 0,$$

ossia  $\bar{y}^3 = (1, 0, 0, 0, 0)$ . Poiché una componente di base è positiva e l'altra è nulla, si ha che  $\bar{y}^3$  è ammissibile e degenera.

Consideriamo la base  $B_4 = \{4, 6\}$ . La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_{B_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{B_4}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione di base primale è

$$\bar{x}^4 = A_{B_4}^{-1} b_{B_4} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

L'insieme degli indici non di base è  $N_4 = \{1, 2, 3, 5\}$ . Vediamo se  $\bar{x}^4$  è ammissibile:

$$b_{N_4} - A_{N_4} \bar{x}^4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nel vettore degli scarti ci c'è una componente negativa ed una nulla, quindi  $\bar{x}^4$  è non ammissibile e degenera.

La soluzione di base duale relativa alla base  $B_4$  è:

$$\bar{y}^4 = \begin{pmatrix} \bar{y}_{B_4}^4 \\ \bar{y}_{N_4}^4 \end{pmatrix}, \quad (\bar{y}_{B_4}^4)^\top = c^\top A_{B_4}^{-1} = (-1, 0) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1), \quad \bar{y}_{N_4}^4 = 0,$$

ossia  $\bar{y}^4 = (0, 0, 0, 1, 0, 1)$ . Poiché entrambe le componenti di base sono positive, si ha che  $\bar{y}^4$  è ammissibile e non degenera.

In Figura 2.12 sono rappresentati i 6 vincoli primali. La regione ammissibile primale è il quadrato di vertici  $(4, 2)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(6, 4)$  e  $(4, 4)$ . Ritroviamo graficamente che le soluzioni di base primali  $\bar{x}^1$  e  $\bar{x}^2$  sono ammissibili con  $\bar{x}^2$  degenera perché aderisce ai vincoli 2, 5 e 6. Invece, le soluzioni di base  $\bar{x}^3$  e  $\bar{x}^4$  non sono ammissibili e  $\bar{x}^4$  è degenera perché aderisce ai vincoli 1, 4 e 6.

In Figura 2.13 rappresentiamo le soluzioni di base duali trovate in precedenza. Data una base  $B$ , la relativa soluzione di base duale  $\bar{y}$  è tale che:

$$c^\top = \bar{y}_B^\top A_B = \sum_{i \in B} \bar{y}_i A_i,$$

## 2. TEORIA DELLA PL

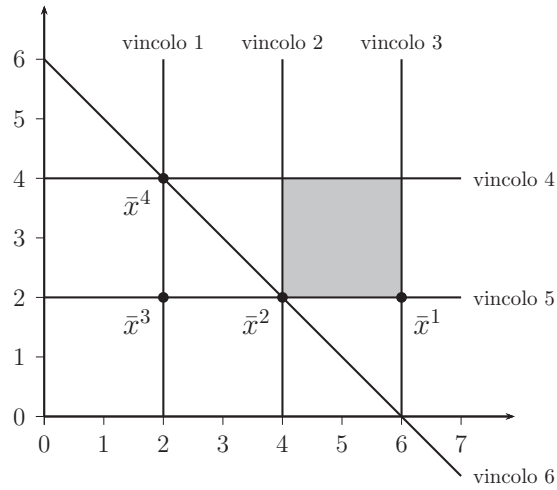


Figura 2.12: soluzioni di base primali ammissibili, non ammissibili, degeneri e non degeneri.

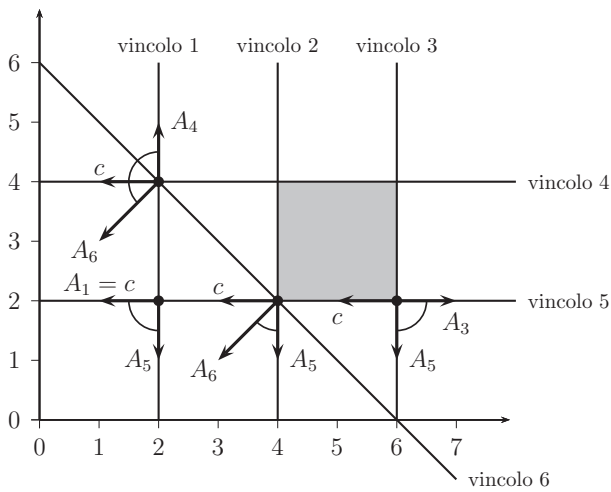


Figura 2.13: soluzioni di base duali ammissibili, non ammissibili, degeneri e non degeneri.

## 2.4 ALGEBRA DELLA PL

cioè il vettore  $c$  è una combinazione lineare delle righe di base della matrice  $A$ , ed i coefficienti di tale combinazione lineare sono le componenti di base di  $\bar{y}$ . La soluzione duale  $\bar{y}$  è ammissibile se le componenti in base sono maggiori o uguali a 0, ossia se  $c$  è una combinazione conica delle righe di base o, in altre parole, se  $c$  appartiene al cono generato dalle righe di base. La soluzione  $\bar{y}$  è degenere quando almeno una componente di base è nulla, ossia quando  $c$  può essere scritto come combinazione lineare di un sottoinsieme delle righe di base.

Ad esempio, alla base  $B_4 = \{4, 6\}$  corrispondono la soluzione primale  $\bar{x}^4 = (2, 4)^\top$  e la soluzione duale  $\bar{y}_{B_4}^4 = (1, 1)^\top$ , quindi possiamo scrivere il vettore  $c$  come combinazione lineare (con coefficienti uguali a 1) delle righe di base  $A_4$  e  $A_6$ :

$$c^\top = (\bar{y}_{B_4}^4)^\top A_{B_4} = \bar{y}_4^4 A_4 + \bar{y}_6^4 A_6 = 1 \cdot A_4 + 1 \cdot A_6.$$

Nel punto (2,4) abbiamo indicato i vettori  $c = (-1, 0)^\top$  e le righe  $A_4 = (0, 1)$  e  $A_6 = (-1, -1)$ . Osserviamo che  $c$  appartiene al cono generato da  $A_4$  e  $A_6$ , cioè  $\bar{y}^4$  è ammissibile, inoltre  $\bar{y}^4$  non ha la stessa direzione né di  $A_4$ , né di  $A_6$ , cioè  $\bar{y}^4$  è non degenere. Nel caso, invece, della base  $B_1 = \{3, 5\}$ , la soluzione primale è  $\bar{x}^1 = (6, 2)^\top$  e quella duale è  $\bar{y}_{B_1}^1 = (-1, 0)^\top$ , quindi

$$c^\top = -1 \cdot A_3 + 0 \cdot A_5$$

In questo caso osserviamo che  $c$  è opposto al vettore  $A_3$ . Quindi  $c$  non può appartenere al cono generato da  $A_3$  e  $A_5$ , cioè  $\bar{y}^1$  non è ammissibile, e avendo  $c$  la stessa direzione di  $A_3$  possiamo dire che  $\bar{y}^1$  è degenere.  $\square$

Le soluzioni di base  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  si chiamano soluzioni di base complementari perché vale il seguente risultato.

**Lemma 2.4.1.** *Due soluzioni di base complementari  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono in scarti complementari.*

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} \bar{y}^\top (b - A\bar{x}) &= (\bar{y}_B^\top, \bar{y}_N^\top) \begin{pmatrix} b_B - A_B \bar{x} \\ b_N - A_N \bar{x} \end{pmatrix} \\ &= (c^\top A_B^{-1}, 0) \begin{pmatrix} b_B - A_B A_B^{-1} b_B \\ b_N - A_N A_B^{-1} b_B \end{pmatrix} \\ &= (c^\top A_B^{-1}, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ b_N - A_N A_B^{-1} b_B \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Dal Lemma 2.4.1 e dal teorema degli scarti complementari possiamo dedurre le seguenti condizioni sufficienti di ottimalità.

## 2. TEORIA DELLA PL

**Teorema 2.4.1.** (Condizioni sufficienti di ottimalità per soluzioni di base)

*Date due soluzioni di base complementari  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , si ha:*

$$\left[ \begin{array}{c} \bar{x} \text{ è ammissibile per } (\mathcal{P}) \\ e \\ \bar{y} \text{ è ammissibile } (\mathcal{D}) \end{array} \right] \implies \left[ \begin{array}{c} \bar{x} \text{ è ottima per } (\mathcal{P}) \\ e \\ \bar{y} \text{ è ottima } (\mathcal{D}) \end{array} \right]$$

Per le soluzioni di base si può porre anche il problema inverso, cioè data una soluzione primale  $\bar{x}$  oppure duale  $\bar{y}$ , vogliamo stabilire se essa sia una soluzione di base. Definiamo gli insiemi di indici:

$$I(\bar{x}) = \{i : A_i \bar{x} = b_i\}, \quad I(\bar{y}) = \{i : \bar{y}_i \neq 0\}.$$

Allora  $\bar{x}$  è una soluzione di base primale se il rango della sottomatrice  $A_{I(\bar{x})}$  è uguale a  $n$ . In tal caso, se  $|I(\bar{x})| = n$ , allora la base  $B = I(\bar{x})$  e  $\bar{x}$  è una soluzione di base non degenera; mentre se  $|I(\bar{x})| > n$ , allora  $\bar{x}$  è una soluzione degenera e più matrici di base possono corrispondere a  $\bar{x}$  e conseguentemente più soluzioni di base duale possono costituire con  $\bar{x}$  una coppia di soluzioni complementari.

Analogamente, affinché  $\bar{y}$  sia una soluzione di base duale, le righe  $A_i$ , con  $i \in I(\bar{y})$ , devono essere linearmente indipendenti. In tal caso, se  $|I(\bar{y})| = n$ , allora la base  $B = I(\bar{y})$  e  $\bar{y}$  è una soluzione di base non degenera; mentre se  $|I(\bar{y})| < n$ , allora  $\bar{y}$  è una soluzione di base degenera (e a tale soluzione corrispondono più matrici di base) se si possono aggiungere  $n - |I(\bar{y})|$  righe di  $A$  (non in  $A_{I(\bar{y})}$ ) alla matrice  $A_{I(\bar{y})}$  in modo che la matrice risultante sia invertibile in più modi possibili. Si osservi che almeno una matrice di questo tipo esiste perché per ipotesi il rango di  $A$  è uguale a  $n$ . Conseguentemente più soluzioni di base primali possono costituire con  $\bar{y}$  una coppia di soluzioni complementari.

Se  $\bar{x}$  (o  $\bar{y}$ ) è non degenera, allora la soluzione complementare è univocamente determinata. Dimostreremo che, in tal caso, la condizione di ottimo è necessaria e sufficiente. Nel caso di soluzioni degeneri invece è solo sufficiente come affermato nelle condizioni di ottimo.

**Esempio 2.4.2.** Con riferimento al problema dell'Esempio 2.4.1, si consideri il vettore  $x = (3, 2)^T$ . Controlliamo quali vincoli primali sono attivi in  $x$ :

$$\begin{array}{rclclcl} A_1 x & = & -3 & < & -2 & = & b_1 \\ A_2 x & = & -3 & > & -4 & = & b_2 \\ A_3 x & = & 3 & < & 6 & = & b_3 \\ A_4 x & = & 2 & < & 4 & = & b_4 \\ A_5 x & = & -2 & = & -2 & = & b_5 \\ A_6 x & = & -5 & > & -6 & = & b_6 \end{array}$$

La soluzione  $x$  non è ammissibile ed è attivo solo il vincolo 5, cioè  $I(x) = \{5\}$  e quindi  $x$  non può essere una soluzione di base.



## 2.4 ALGEBRA DELLA PL

Consideriamo ora il punto  $\bar{x} = (2, 2)^T$  e controlliamo quali vincoli primali sono attivi in  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} A_1 \bar{x} &= -2 = -2 = b_1 \\ A_2 \bar{x} &= -2 > -4 = b_2 \\ A_3 \bar{x} &= 2 < 6 = b_3 \\ A_4 \bar{x} &= 2 < 4 = b_4 \\ A_5 \bar{x} &= -2 = -2 = b_5 \\ A_6 \bar{x} &= -4 > -6 = b_6 \end{aligned}$$

La soluzione  $\bar{x}$  non è ammissibile e sono attivi solo i vincoli 1 e 5, cioè  $I(\bar{x}) = \{1, 5\}$ . Le righe 1 e 5 della matrice  $A$  formano la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

di rango 2, quindi  $\bar{x}$  è una soluzione di base non degenera corrispondente alla base  $B = \{1, 5\}$ . La soluzione di base complementare è

$$\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

che è ammissibile e degenera per il duale.

Consideriamo infine il punto  $\tilde{x} = (4, 2)^T$ :

$$\begin{aligned} A_1 \tilde{x} &= -4 < -2 = b_1 \\ A_2 \tilde{x} &= -4 = -4 = b_2 \\ A_3 \tilde{x} &= 4 < 6 = b_3 \\ A_4 \tilde{x} &= 2 < 4 = b_4 \\ A_5 \tilde{x} &= -2 = -2 = b_5 \\ A_6 \tilde{x} &= -6 = -6 = b_6 \end{aligned}$$

La soluzione  $\tilde{x}$  è ammissibile e sono aderenti solo i vincoli 2, 5 e 6, cioè  $I(\tilde{x}) = \{2, 5, 6\}$ . Le righe 2, 5 e 6 formano la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

che è di rango 2, quindi  $\tilde{x}$  è una soluzione di base degenera e corrisponde alle basi:

$$B' = \{2, 5\}, \quad B'' = \{2, 6\}, \quad B''' = \{5, 6\},$$

infatti:

$$\tilde{x} = A_{B'}^{-1} b_{B'} = A_{B''}^{-1} b_{B''} = A_{B'''}^{-1} b_{B'''} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni duali complementari corrispondenti a  $\tilde{x}$  sono date, come si può verificare, da:

$$\bar{y}' = \bar{y}'' = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \bar{y}''' = (0, 0, 0, 0, -1, 1)^T,$$

dove  $\bar{y}'$  e  $\bar{y}''$  coincidono, sono ammissibili e degeneri per il duale, mentre  $\bar{y}'''$  è non ammissibile e non degenera.  $\square$

**Esempio 2.4.3.** Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \max & x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 & \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 & \leq -4 \\ x_1 + x_2 & \leq 14 \\ x_1 & \leq 8 \\ -x_2 & \leq -4 \end{cases}$$

e il suo duale

$$\begin{cases} \min & y_1 - 4y_2 + 14y_3 + 8y_4 - 4y_5 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & = 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 - y_5 & = 1 \\ y & \geq 0 \end{cases}$$

Il vettore  $\bar{y} = (0, 0, 1, 0, 0)^\top$  è una soluzione duale ammissibile. Inoltre risulta  $I(\bar{y}) = \{3\}$ , quindi  $\bar{y}$  è una soluzione di base degenera. Si può facilmente verificare che le basi per  $\bar{y}$  sono

$$B_1 = \{1, 3\}, \quad B_2 = \{2, 3\}, \quad B_3 = \{3, 4\}, \quad B_4 = \{3, 5\}$$

e risulta:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{B_1}^\top &= c^\top A_{B_1}^{-1} = \bar{y}_{B_2}^\top = c^\top A_{B_2}^{-1} = (0, 1) \\ \bar{y}_{B_3}^\top &= c^\top A_{B_3}^{-1} = \bar{y}_{B_4}^\top = c^\top A_{B_4}^{-1} = (1, 0). \end{aligned}$$

Le soluzioni primali complementari corrispondenti a  $\bar{y}$  sono date, come si può verificare, da:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= A_{B_1}^{-1} b_{B_1} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 29/3 \end{pmatrix} && \text{ammissibile non degenera,} \\ \bar{x}^2 &= A_{B_2}^{-1} b_{B_2} = A_{B_3}^{-1} b_{B_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} && \text{ammissibile degenera,} \\ \bar{x}^4 &= A_{B_4}^{-1} b_{B_4} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} && \text{non ammissibile.} \end{aligned}$$

□

A questo punto diamo una caratterizzazione algebrica dei vertici di un poliedro. Tratteremo prima il caso di un poliedro in forma primale e poi di uno in forma duale.

**Teorema 2.4.2.** *Sia  $P$  un poliedro nella forma  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ . Allora*

$$\bar{x} \text{ è un vertice di } P \iff \bar{x} \text{ è una soluzione di base ammissibile.}$$

**Dimostrazione.**

$\implies$ : Supponiamo che  $\bar{x}$  sia un vertice di  $P$  e consideriamo l'insieme dei vincoli attivi in  $\bar{x}$ :

$$I(\bar{x}) = \{i : A_i \bar{x} = b_i\}.$$

## 2.4 ALGEBRA DELLA PL

Per dimostrare che  $\bar{x}$  è una soluzione di base, bisogna provare che il rango della matrice  $A_{I(\bar{x})}$  è uguale a  $n$ . Supponiamo per assurdo che tale rango sia minore di  $n$ , allora le colonne della matrice  $A_{I(\bar{x})}$  sono linearmente indipendenti, cioè esiste un vettore  $d \neq 0$  tale che  $A_{I(\bar{x})}d = 0$ . Definiamo ora i vettori:

$$z = \bar{x} + \lambda d \quad w = \bar{x} - \lambda d,$$

dove  $\lambda$  è uno scalare positivo scelto sufficientemente piccolo. Quindi  $z \neq w$  ed inoltre  $z, w \in P$ , infatti

$$A_i z = A_i \bar{x} + \lambda A_i d \begin{cases} = A_i \bar{x} = b_i & \text{se } i \in I(\bar{x}), \\ < b_i & \text{se } i \notin I(\bar{x}), \end{cases}$$

e analogamente per  $w$ . Pertanto si ha che

$$\bar{x} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w,$$

che è assurdo perché per ipotesi  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$ .

$\Leftarrow$ : Supponiamo che  $\bar{x}$  sia una soluzione di base ammissibile relativa alla base  $B$ , cioè

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B, \quad A_N \bar{x} \leq b_N.$$

Supponiamo per assurdo che  $\bar{x}$  non sia un vertice, allora esistono due punti  $z, w \in P$ , con  $z \neq w$ , tali che

$$\bar{x} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w.$$

Allora per ogni  $i \in B$  si ha

$$b_i = A_i \bar{x} = \frac{1}{2} \underbrace{A_i z}_{\leq b_i} + \frac{1}{2} \underbrace{A_i w}_{\leq b_i},$$

quindi si deve avere che  $A_i z = A_i w = b_i$ , cioè

$$A_B z = A_B w = b_B,$$

ossia

$$z = w = A_B^{-1} b_B = \bar{x},$$

che è assurdo perché avevamo supposto  $z \neq w$ .

□

**Teorema 2.4.3.** Sia  $D$  un poliedro nella forma  $D = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, y \geq 0\}$ . Allora

$$\bar{y} \text{ è un vertice di } D \iff \bar{y} \text{ è una soluzione di base ammissibile.}$$

## 2. TEORIA DELLA PL

### Dimostrazione.

$\implies$ : Supponiamo che  $\bar{y}$  sia un vertice di  $D$  e consideriamo:

$$I(\bar{y}) = \{i : \bar{y}_i > 0\}.$$

Per dimostrare che  $\bar{y}$  è una soluzione di base, bisogna provare che le righe  $A_i$ , con  $i \in I(\bar{y})$ , sono linearmente indipendenti. Supponiamo per assurdo che tali righe siano linearmente dipendenti, allora esiste un vettore  $d \neq 0$  tale che  $d^T A_{I(\bar{y})} = 0$ . Definiamo ora i vettori  $z$  e  $w$  nel modo seguente:

$$z_i = \begin{cases} \bar{y}_i + \lambda d_i & \text{se } i \in I(\bar{y}), \\ 0 & \text{se } i \notin I(\bar{y}). \end{cases} \quad w_i = \begin{cases} \bar{y}_i - \lambda d_i & \text{se } i \in I(\bar{y}), \\ 0 & \text{se } i \notin I(\bar{y}). \end{cases}$$

dove  $\lambda$  è uno scalare positivo scelto sufficientemente piccolo. Quindi  $z \neq w$  ed inoltre  $z, w \in D$ , infatti  $z, w \geq 0$  ed inoltre:

$$\begin{aligned} z^T A &= z_{I(\bar{y})}^T A_{I(\bar{y})} = (\bar{y}_{I(\bar{y})} + \lambda d)^T A_{I(\bar{y})} = \bar{y}_{I(\bar{y})}^T A_{I(\bar{y})} + \lambda d^T A_{I(\bar{y})} = \bar{y}_{I(\bar{y})}^T A_{I(\bar{y})} = c^T, \\ w^T A &= w_{I(\bar{y})}^T A_{I(\bar{y})} = (\bar{y}_{I(\bar{y})} - \lambda d)^T A_{I(\bar{y})} = \bar{y}_{I(\bar{y})}^T A_{I(\bar{y})} - \lambda d^T A_{I(\bar{y})} = \bar{y}_{I(\bar{y})}^T A_{I(\bar{y})} = c^T, \end{aligned}$$

Pertanto si ha che

$$\bar{y} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} w,$$

che è assurdo perché per ipotesi  $\bar{y}$  è un vertice di  $D$ .

$\Leftarrow$ : Supponiamo che  $\bar{y}$  sia una soluzione di base ammissibile relativa alla base  $B$ , cioè

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} \geq 0 \quad \bar{y}_N = 0.$$

Supponiamo per assurdo che  $\bar{y}$  non sia un vertice, allora esistono due punti  $z, w \in D$ , con  $z \neq w$ , tali che

$$\bar{y} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} w.$$

Poiché  $z_N \geq 0$ ,  $w_N \geq 0$  e

$$\frac{1}{2} z_N + \frac{1}{2} w_N = \bar{y}_N = 0,$$

si ha che  $z_N = w_N = 0$ . Inoltre, poiché  $z, w \in D$  segue che

$$c^T = z^T A = z_B^T A_B, \quad c^T = w^T A = w_B^T A_B,$$

quindi

$$z_B^T = w_B^T = c^T A_B^{-1} = \bar{y}_B^T,$$

che è assurdo perché avevamo supposto  $z \neq w$ .

□

I Teoremi 2.4.2 e 2.4.3 legano il concetto geometrico di vertice (che è fondamentale per la PL grazie al Teorema 2.2.2 e al Corollario 2.2.1) con il concetto analitico di soluzione di

base ammissibile e rendono così possibile da un punto di vista computazionale la ricerca dei vertici di un poliedro. Nonostante ciò il numero di vertici di un poliedro in  $\mathbb{R}^n$  è, in generale, esponenziale rispetto a  $n$  ed una enumerazione di essi è praticamente impossibile anche quando  $n$  è dell'ordine di qualche centinaio. L'esplorazione dei vertici alla ricerca di quello ottimo deve essere dunque guidata nella PL da algoritmi "intelligenti". Descriveremo nel prossimo capitolo il più famoso di essi e ancor'oggi tra i più efficienti.

## 2.5 PL parametrica

In questo paragrafo analizziamo come varia la soluzione ottima di un problema di PL primale perturbando il vettore  $c$  della funzione obiettivo oppure il vettore  $b$  della regione ammissibile.

Consideriamo una coppia primale/duale di problemi:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \max & c^\top x \\ & Ax \leq b \end{cases} \quad (\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \min & y^\top b \\ & y^\top A = c^\top \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Supponiamo che  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  siano due soluzioni di base complementari (relative alla base  $B$ ) ottime rispettivamente per i problemi  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{D})$ . Indichiamo con  $v(\mathcal{P}) = c^\top \bar{x}$  il valore ottimo di  $(\mathcal{P})$ .

### Parametrizzazione del vettore $c$

Perturbiamo il vettore  $c$  della funzione obiettivo primale aggiungendo un termine  $\Delta c$ . I problemi  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{D})$  perturbati diventano

$$(\mathcal{P}_{\Delta c}) \quad \begin{cases} \max & (c + \Delta c)^\top x \\ & Ax \leq b \end{cases} \quad (\mathcal{D}_{\Delta c}) \quad \begin{cases} \min & y^\top b \\ & y^\top A = (c + \Delta c)^\top \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Indichiamo con  $v(\mathcal{P}_{\Delta c})$  il valore ottimo del primale perturbato  $(\mathcal{P}_{\Delta c})$ .

**Teorema 2.5.1.** (Limitazione inferiore alla variazione)

$$v(\mathcal{P}_{\Delta c}) - v(\mathcal{P}) \geq (\Delta c)^\top \bar{x}.$$

**Dimostrazione.** Il vettore  $\bar{x}$  è ammissibile anche per il problema primale perturbato  $(\mathcal{P}_{\Delta c})$  e quindi si ha:

$$v(\mathcal{P}_{\Delta c}) \geq (c + \Delta c)^\top \bar{x} = c^\top \bar{x} + (\Delta c)^\top \bar{x} = v(\mathcal{P}) + (\Delta c)^\top \bar{x}.$$

□

**Teorema 2.5.2.** *Se*

$$(c + \Delta c)^\top A_B^{-1} \geq 0, \tag{2.12}$$

*allora la base  $B$  è ottima anche per il primale perturbato  $(\mathcal{P}_{\Delta c})$ .*

## 2. TEORIA DELLA PL

**Dimostrazione.** La formula (2.12) equivale all'ammissibilità della soluzione di base, relativa alla base  $B$ , per il duale perturbato  $(\mathcal{D}_{\Delta c})$ .  $\square$

### Parametrizzazione del vettore $b$

Supponiamo ora di perturbare solo le componenti del vettore  $b$  che non appartengono alla base  $B$  (ottima del primale), cioè sommiamo al vettore  $b$  un termine  $\Delta b$  tale che

$$(\Delta b)_i = 0 \quad \forall i \in B.$$

I problemi  $(\mathcal{P})$  e  $(\mathcal{D})$  perturbati diventano:

$$(\mathcal{P}_{\Delta b}) \quad \begin{cases} \max & c^\top x \\ A x \leq & b + \Delta b \end{cases} \quad (\mathcal{D}_{\Delta b}) \quad \begin{cases} \min & y^\top (b + \Delta b) \\ y^\top A = & c^\top \\ y \geq & 0 \end{cases}$$

**Teorema 2.5.3.** *La base  $B$  è ottima anche per il primale perturbato  $(\mathcal{P}_{\Delta b})$  se e solo se*

$$(\Delta b)_i \geq A_i \bar{x} - b_i \quad \forall i \notin B.$$

**Dimostrazione.** Il poliedro del duale perturbato  $(\mathcal{D}_{\Delta b})$  non cambia e quindi la soluzione di base duale  $\bar{y}$ , relativa alla base  $B$ , rimane ammissibile. Pertanto la base  $B$  è ottima se e solo se la soluzione di base, relativa a  $B$ , del primale perturbato, cioè  $\bar{x}$ , è ammissibile:

$$A_i \bar{x} \leq (b + \Delta b)_i = b_i + (\Delta b)_i \quad \forall i \notin B.$$

$\square$

# Capitolo 3

## Algoritmo del simplesso

### 3.1 Simpleso primale

Descriviamo l'algoritmo del simplesso per la risoluzione di un problema di PL in forma primale standard

$$\begin{cases} \max & c^\top x \\ A x \leq & b \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

in cui la matrice  $A$ , di dimensione  $m \times n$ , ha rango uguale a  $n$  (tale ipotesi non è restrittiva perché possiamo sempre trasformare il problema in forma primale simmetrica). L'algoritmo parte da una soluzione di base primale ammissibile (cioè un vertice). Se la soluzione di base complementare è ammissibile, allora esse sono ottime rispettivamente per il primale ed il duale, altrimenti si cambia base. Il cambio di base è definito in modo che se la nuova soluzione di base primale è diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo cresce, mentre se la nuova soluzione di base primale coincide con quella vecchia, si evita di ciclare sulle stesse basi con opportune regole anticiclo (vedi Figura 3.1).

Dimostriamo la correttezza dell'algoritmo.

**Teorema 3.1.1.** *Il simplesso primale risolve  $(\mathcal{P})$  in un numero finito di iterazioni.*

**Dimostrazione.** Per prima cosa dimostriamo che il cambio di indici  $B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$  genera un cambio di base. Nella matrice di base  $A_B$  si cambia la riga  $r$ -esima corrispondente all'indice  $h$  con la riga corrispondente all'indice  $k$  e si ottiene  $A_{B'}$ . Osserviamo che  $A_{B'}$  è invertibile se e solo se  $A_{B'}A_B^{-1}$  è invertibile. Ma

$$A_{B'}A_B^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & 0 & & 0 \\ \hline * & \dots & * & -A_k W^h & * & \dots & * \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & & 1 \end{array} \right), \quad (3.1)$$

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

#### Algoritmo del simplesso primale

1. Trova una base  $B$  che genera una soluzione di base primale ammissibile
2. Calcola la soluzione di base primale  $\bar{x} := A_B^{-1} b_B$  e la soluzione di base duale

$$\bar{y} := \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \bar{y}_B^\top := c^\top A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N := 0$$

3. **if**  $\bar{y}_B \geq 0$  **then** STOP ( $\bar{x}$  è ottima per  $(\mathcal{P})$  e  $\bar{y}$  è ottima per  $(\mathcal{D})$ ).  
**else** calcola l'indice uscente

$$h := \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland})$$

poni  $W := -A_B^{-1}$  ed indica con  $W^h$  la  $h$ -esima colonna di  $W$

4. **if**  $A_i W^h \leq 0 \quad \forall i \in N$  **then** STOP ( $(\mathcal{P})$  ha valore ottimo  $+\infty$  e  $(\mathcal{D})$  è vuoto)

$$\textbf{else} \text{ calcola } \vartheta := \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} : i \in N, A_i W^h > 0 \right\},$$

calcola l'indice entrante

$$k := \min \left\{ i \in N : A_i W^h > 0, \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} = \vartheta \right\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland}),$$

aggiorna la base  $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$  e torna al passo 2

Figura 3.1: algoritmo del simplesso primale.



### 3.1 SIMPLESSO PRIMALE

quindi  $A_{B'}$  è invertibile se e solo se  $A_k W^h \neq 0$ , ma per come è stato definito l'indice entrante  $k$  si ha che  $A_k W^h > 0$ .

Ad una certa iterazione si ha la soluzione di base primale  $\bar{x}$ . Se la soluzione di base complementare  $\bar{y}$  è duale ammissibile, allora, per il Teorema 2.4.1,  $\bar{x}$  è ottima per il primale e  $\bar{y}$  è ottima per il duale (questo dimostra la correttezza del criterio di stop al passo 3). Se, invece,  $\bar{y}$  non è duale ammissibile, allora consideriamo ora la semiretta uscente da  $\bar{x}$  di direzione  $W^h$ , cioè

$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda W^h, \quad \lambda \geq 0. \quad (3.2)$$

Si ha:

$$c^T x(\lambda) = c^T \bar{x} + \lambda c^T W^h = c^T \bar{x} - \lambda \underbrace{\bar{y}_h}_{<0} > c^T \bar{x}, \quad \forall \lambda > 0,$$

Quindi il valore della funzione obiettivo cresce spostandosi dal punto  $\bar{x}$  nella direzione  $W^h$ .

Vediamo ora quali punti della semiretta appartengono al poliedro. Consideriamo prima i vincoli di base: poiché

$$A_i W^h = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in B \setminus \{h\}, \\ -1 & \text{se } i = h, \end{cases}$$

si ha:

$$A_i x(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i W^h = \begin{cases} b_i & \text{se } i \in B \setminus \{h\}, \\ b_i - \lambda & \text{se } i = h, \end{cases} \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Quindi i vincoli di base  $A_i x \leq b_i$ , con  $i \in B$ , sono soddisfatti da tutti i punti  $x(\lambda)$  della semiretta. D'altra parte, un vincolo non di base

$$A_i x(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i W^h \leq b_i \quad i \in N,$$

è soddisfatto dai seguenti valori di  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 & \text{se } A_i W^h \leq 0, \\ \lambda \leq \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} & \text{se } A_i W^h > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Se  $A_i W^h \leq 0$  per ogni  $i \in N$ , allora tutta la semiretta  $x(\lambda)$  è contenuta nel poliedro e quindi  $c^T x(\lambda)$  tende a  $+\infty$  al crescere di  $\lambda$  (questo dimostra la correttezza del criterio di stop al passo 4).

Se, invece, esiste un indice  $i \in N$  tale che  $A_i W^h > 0$ , allora  $x(\lambda)$  è ammissibile se

$$0 \leq \lambda \leq \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} : i \in N, A_i W^h > 0 \right\} = \vartheta.$$

Osserviamo che il punto ammissibile  $x(\vartheta)$  è la soluzione di base primale associata alla nuova base  $B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ , infatti:

$$\begin{aligned} i \in B \setminus \{h\} &\implies A_i x(\vartheta) = b_i \\ i = k &\implies A_k x(\vartheta) = A_k (\bar{x} + \vartheta W^h) = A_k \bar{x} + \frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k W^h} A_k W^h = b_k. \end{aligned}$$

Se  $\vartheta = 0$  (caso degenero), si ottiene un cambio di base rimanendo sullo stesso vertice degenero  $\bar{x}$ , ma le regole anticiclo di Bland evitano di ritornare su una base già visitata (vedi Teorema 3.3.1).

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

Se  $\vartheta > 0$  (caso non degenere), si ottiene un nuovo vertice  $x(\vartheta)$ , adiacente al vecchio vertice  $\bar{x}$ , in cui è cresciuto il valore della funzione obiettivo. Pertanto l'algoritmo del simplessso non visita mai per due volte la stessa base. Essendo finito il numero di basi ammissibili, l'algoritmo termina dopo un numero finito di iterazioni, o trovando una coppia primale/duale di soluzioni ottime oppure dicendo che il valore ottimo del primale è  $+\infty$ .  $\square$

Descriviamo ora il significato della semiretta (3.2) per problemi con due variabili. Supponiamo di avere un vertice non degenere  $\bar{x}$  intersezione del vincolo 1 e del vincolo 2. Siano

$$\begin{aligned} A_1 x &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ A_2 x &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{aligned}$$

le equazioni del vincolo 1 e 2 rispettivamente. Sia

$$W = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_3 & i_4 \end{pmatrix}$$

l'opposta della matrice inversa della matrice di base

$$A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se 1 è l'indice uscente dalla base, allora  $W^1 = (i_1, i_3)^\top$ . Per definizione di inversa si ha che

$$A_2 W^1 = a_{21} i_1 + a_{22} i_3 = 0$$

e quindi il vettore  $A_2 = (a_{21}, a_{22})$ , ossia la seconda riga di  $A$ , è ortogonale a  $W^1$ . Ma il vettore  $A_2$  è ortogonale alla retta individuata dal vincolo 2, quindi  $W^1$  ha la stessa direzione di tale retta. Inoltre abbiamo:

$$A_1 W^1 = a_{11} i_1 + a_{12} i_3 = -1,$$

quindi essendo negativo il prodotto scalare tra  $W^1$  e  $A_1$ , si ha che il vettore  $W^1$  forma con  $A_1$  un angolo ottuso. In conclusione seguire la semiretta (3.2) significa proprio abbandonare il vincolo 1 e seguire lo spigolo individuato dal vincolo 2.

**Osservazione 3.1.1.** Da un punto di vista computazionale la nuova matrice di base  $A_{B'}$  si inverte facilmente, infatti dalla relazione (3.1) ricaviamo:

### 3.1 SIMPLESSO PRIMALE

$$A_{B'}^{-1} = A_B^{-1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & 0 \\ \hline & & & A_k A_B^{-1} & & \\ \hline & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right)^{-1}$$

$$A_B^{-1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & 0 \\ \hline & & & -A_k W & & \\ \hline & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right)^{-1}$$

e quindi

$$A_{B'}^{-1} = A_B^{-1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & 0 & & 0 \\ \hline -A_k W^{B_1} & \dots & -A_k W^{B_{r-1}} & -A_k W^h & -A_k W^{B_{r+1}} & \dots & -A_k W^{B_n} \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & & 1 \end{array} \right)^{-1}$$

$$= A_B^{-1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & 0 & & 0 \\ \hline -\frac{A_k W^{B_1}}{A_k W^h} & \dots & -\frac{A_k W^{B_{r-1}}}{A_k W^h} & -\frac{1}{A_k W^h} & -\frac{A_k W^{B_{r+1}}}{A_k W^h} & \dots & -\frac{A_k W^{B_n}}{A_k W^h} \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & & 1 \end{array} \right)$$

dove  $B_1, \dots, B_n$  sono gli indici della base  $B$ , con  $B_r = h$ , e  $W^{B_1}, \dots, W^{B_n}$  sono le colonne di  $W = -A_B^{-1}$ .  $\square$

**Esempio 3.1.1.** Risolviamo il seguente problema

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ -5x_1 - 2x_2 & \leq 0 \\ -x_1 & \leq 1 \\ x_2 & \leq 5 \\ 3x_1 + 3x_2 & \leq 30 \\ -7x_1 + 6x_2 & \leq 22 \end{cases} \quad (3.4)$$

con il simplesso primale partendo dalla base  $B = \{1, 2\}$ .

**1° iterazione.** La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

La relativa soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\bar{x}$  soddisfa i rimanenti tre vincoli,  $\bar{x}$  è una soluzione di base primale ammissibile (aderendo anche al quinto vincolo,  $\bar{x}$  risulta essere una soluzione di base degenera). Calcoliamo la soluzione di base duale:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}, \frac{13}{2} \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0,$$

quindi  $\bar{y} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2}, 0, 0, 0\right)^T$ . La soluzione  $\bar{y}$  non è ammissibile perché  $\bar{y}_1 < 0$ , quindi l'indice uscente dalla base è 1 e poniamo  $W^1$  uguale all'opposto della prima colonna di  $A_B^{-1}$ , cioè

$$W^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i prodotti  $A_i W^1$  per  $i = 3, 4, 5$ :

$$A_3 W^1 = \frac{1}{2}, \quad A_4 W^1 = \frac{3}{2}, \quad A_5 W^1 = 3.$$

Per determinare l'indice entrante, basta ricordare che  $\bar{x}$  è degenera aderendo anche al quinto vincolo: dunque l'indice entrante è 5. Infatti, nel passo 4 del simplesso si determina l'indice per il quale è minimo il rapporto tra quelli che seguono:

$$\frac{b_3 - A_3 \bar{x}}{A_3 W^1} = \frac{5/2}{1/2} = 5, \quad \frac{b_4 - A_4 \bar{x}}{A_4 W^1} = \frac{51/2}{3/2} = \frac{51}{3}, \quad \frac{b_5 - A_5 \bar{x}}{A_5 W^1} = \frac{0}{3} = 0.$$

### 3.1 SIMPLESSO PRIMALE

**2° iterazione.** La nuova base risulta  $B = \{2, 5\}$  e la soluzione di base primale è sempre  $\bar{x} = \left(-1, \frac{5}{2}\right)^T$ . La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -7/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

La corrispondente soluzione di base duale è  $\bar{y} = \left(0, -\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)^T$  che non è ammissibile. In questo caso l'indice uscente è 2. Poniamo

$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/6 \end{pmatrix}$$

e valutiamo ora i prodotti scalari  $A_i W^2$ , per  $i = 1, 3, 4$ :

$$A_1 W^2 = -\frac{22}{3}, \quad A_3 W^2 = \frac{7}{6}, \quad A_4 W^2 = \frac{13}{2}.$$

L'indice entrante è quello per il quale è minimo il rapporto tra i due che seguono:

$$\frac{b_3 - A_3 \bar{x}}{A_3 W^2} = \frac{5/2}{7/6} = \frac{15}{7}, \quad \frac{b_4 - A_4 \bar{x}}{A_4 W^2} = \frac{51/2}{13/2} = \frac{51}{13}.$$

L'indice entrante è quindi 3.

**3° iterazione.** La nuova base è  $B = \{3, 5\}$ , la matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 6/7 & -1/7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e la nuova soluzione di base primale è  $\bar{x} = \left(\frac{8}{7}, 5\right)^T$ . La soluzione di base duale è  $\bar{y} = \left(0, 0, \frac{27}{7}, 0, -\frac{1}{7}\right)^T$  e l'indice uscente è 5. Poniamo

$$W^5 = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e valutiamo ora i prodotti scalari  $A_i W^5$ , per  $i = 1, 2, 4$ :

$$A_1 W^5 = -\frac{5}{7}, \quad A_2 W^5 = -\frac{1}{7}, \quad A_4 W^5 = \frac{3}{7}.$$

Poiché l'unico prodotto scalare positivo è  $A_4 W^5$ , possiamo dire subito che l'indice entrante è 4.

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

**Iter. 4.** La nuova base è quindi  $B = \{3, 4\}$ , la matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La nuova soluzione di base primale è  $\bar{x} = (5, 5)^T$ . La soluzione di base duale è  $\bar{y} = \left(0, 0, 2, \frac{1}{3}, 0\right)^T$  che è ammissibile, pertanto l'algoritmo del simplesso termina fornendo  $\bar{x} = (5, 5)^T$  come soluzione ottima primale e  $\bar{y} = \left(0, 0, 2, \frac{1}{3}, 0\right)^T$  come soluzione ottima duale.

Nella Figura 3.2 è rappresentato il poliedro primale ed i tre vertici esplorati dal simplesso. Su ogni vertice sono indicati i vettori ortogonali ai vincoli aderenti a quel vertice (cioè le righe  $A_i$  della matrice  $A$  corrispondenti ai vincoli aderenti) ed il vettore  $c$  della funzione obiettivo. Osserviamo che solo nel vertice ottimo  $\bar{x} = (5, 5)^T$  il vettore  $c$  appartiene al cono generato dai vettori  $A_i$  ortogonali ai vincoli aderenti (cioè la soluzione di base duale è ammissibile).

□

**Esempio 3.1.2.** Applichiamo il simplesso primale al problema:

$$\begin{cases} \min & -101x_1 + 87x_2 + 23x_3 \\ & 6x_1 - 13x_2 - 3x_3 \leq 11 \\ & 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_3 \geq 0 \end{cases}$$

partendo dal vettore  $\bar{x} = (11/6, 0, 0)^T$ .

Trasformiamo il problema in forma primale:

$$\begin{cases} \max & 101x_1 - 87x_2 - 23x_3 \\ & 6x_1 - 13x_2 - 3x_3 \leq 11 \\ & 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -x_3 \leq 0 \end{cases}$$

ed osserviamo che il punto  $\bar{x}$  è il vertice che corrisponde alla base  $B = \{1, 5, 6\}$ .

### 3.1 SIMPLESSO PRIMALE

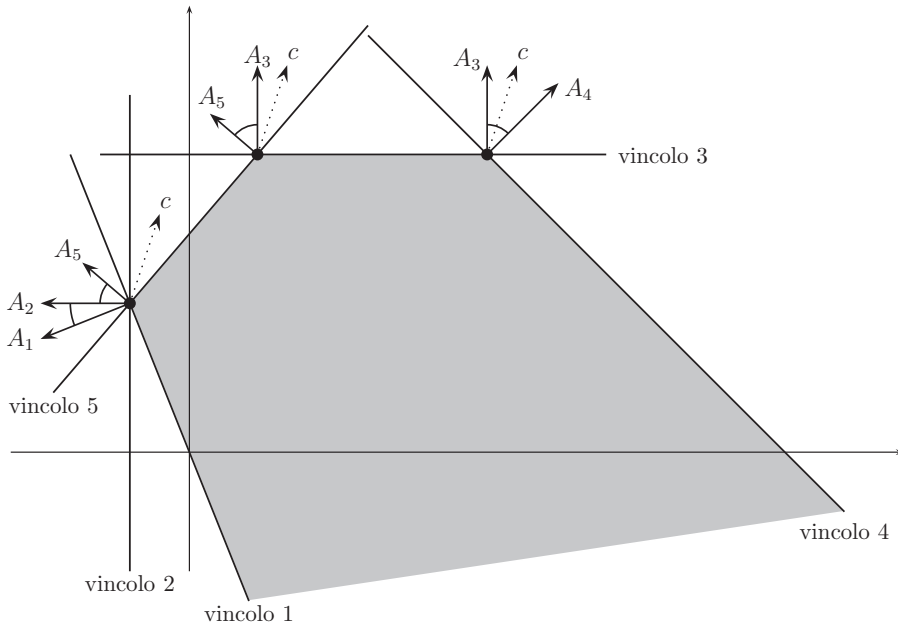


Figura 3.2: applicazione del simplesso primale al problema (3.4).

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

**1° iterazione.** La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -13/6 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La soluzione di base duale è

$$\bar{y} = \left( \frac{101}{6}, 0, 0, 0, -\frac{791}{6}, -\frac{55}{2} \right)^T.$$

La seconda componente in base della soluzione duale è negativa, quindi l'indice 5 esce dalla base e si ha  $W^5 = (13/6, 1, 0)^T$ . Dai prodotti

$$A_2 W^5 = 24 \quad A_3 W^5 = \frac{43}{6} \quad A_4 W^5 = -\frac{13}{6},$$

ricaviamo i rapporti

$$\frac{b_2 - A_2 \bar{x}}{A_2 W^5} = \frac{34}{24}, \quad \frac{b_3 - A_3 \bar{x}}{A_3 W^5} = \frac{61}{43},$$

per cui l'indice 2 entra nella base.

**2° iterazione.** La nuova base è  $B = \{1, 2, 6\}$ , la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -3 \\ 6 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 11/144 & 13/144 & -7/144 \\ -1/24 & 1/24 & 5/24 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il nuovo vertice ha coordinate  $\bar{x} = (353/72, 17/12, 0)^T$ . La soluzione duale è

$$\bar{y} = \left( \frac{1633}{144}, \frac{791}{144}, 0, 0, 0, -\frac{5}{144} \right)^T$$

quindi l'indice 6 esce di base e  $W^6 = (7/144, -5/24, 1)^T$ . Calcoliamo i prodotti:

$$A_3 W^6 = \frac{1}{144}, \quad A_4 W^6 = -\frac{7}{144}, \quad A_5 W^6 = \frac{5}{24},$$

ed i rapporti

$$\frac{b_3 - A_3 \bar{x}}{A_3 W^6} = 2, \quad \frac{b_5 - A_5 \bar{x}}{A_5 W^6} = \frac{34}{5},$$

pertanto l'indice 3 entra in base.

**3° iterazione.** La nuova base è  $B = \{1, 2, 3\}$ , la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -3 \\ 6 & 11 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 9 & -30 \\ -19 & -43 & 144 \end{pmatrix}$$

Il nuovo vertice primale è  $\bar{x} = (5, 1, 2)^T$  e la soluzione di base duale è  $\bar{y} = (12, 4, 5, 0, 0, 0)$  che è ammissibile, quindi siamo all'ottimo.

□



## Problema ausiliario primale

Per applicare il semplice primale al problema

$$\begin{cases} \max & c^\top x \\ & Ax \leq b \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

è necessaria una base ammissibile di partenza. Quando non si conosce, si costruisce il cosiddetto problema ausiliario primale. Supponiamo di avere una base  $B$  non ammissibile per il problema  $(\mathcal{P})$ , con  $\bar{x} = A_B^{-1}b_B$  la corrispondente soluzione di base. Tra i vincoli non di base distinguiamo quelli soddisfatti da  $\bar{x}$  da quelli non soddisfatti:

$$U = \{i \in N : A_i \bar{x} \leq b_i\}, \quad V = \{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\},$$

e costruiamo il problema ausiliario primale:

$$\begin{cases} \max & -\sum_{i \in V} \varepsilon_i \\ & A_i x \leq b_i & \text{per } i \in B \cup U \\ & A_i x - \varepsilon_i \leq b_i & \text{per } i \in V \\ & -\varepsilon_i \leq 0 & \text{per } i \in V \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{aux})$$

Dalla definizione del problema ausiliario segue che il vettore  $(\bar{x}, \bar{\varepsilon})$ , con

$$\bar{\varepsilon} = A_V \bar{x} - b_V \geq 0,$$

è una soluzione di base ammissibile per  $(\mathcal{P}_{aux})$  relativa alla base  $B \cup V$ , con matrice di base uguale a

$$\left( \begin{array}{c|c} A_B & 0 \\ \hline A_V & -I \end{array} \right).$$

A partire da tale base ammissibile, possiamo applicare il semplice primale per risolvere il problema ausiliario. Il valore ottimo del problema ausiliario (che è compreso tra  $-\sum_{i \in V} \bar{\varepsilon}_i$  e 0) stabilisce se esiste una base ammissibile per il problema  $(\mathcal{P})$ .

### Teorema 3.1.2.

1. Se il valore ottimo di  $(\mathcal{P}_{aux})$  è  $< 0$  allora  $(\mathcal{P})$  non ha soluzioni ammissibili.
2. Se il valore ottimo di  $(\mathcal{P}_{aux})$  è  $= 0$  allora c'è una base ammissibile per  $(\mathcal{P})$  che si costruisce a partire da una base ottima di  $(\mathcal{P}_{aux})$ .

### Dimostrazione.

1. Se, per assurdo,  $(\mathcal{P})$  avesse una soluzione ammissibile  $\bar{x}$ , allora  $x = \bar{x}$  e  $\varepsilon = 0$  sarebbe ammissibile per  $(\mathcal{P}_{aux})$  con la funzione obiettivo che vale 0, ma è assurdo perché per ipotesi il valore massimo di  $(\mathcal{P}_{aux})$  è negativo.

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

2. Supponiamo che la soluzione ottima di base ( $\mathcal{P}_{aux}$ ) sia  $(x^*, \varepsilon^*)$  con  $\varepsilon^* = 0$ . Scriviamo a blocchi la corrispondente matrice di base, distinguendo i tre tipi di vincoli di ( $\mathcal{P}_{aux}$ ):

$$\left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_2 & -I_2 \\ \hline 0 & -I_3 \end{array} \right).$$

Se calcoliamo il determinante di tale matrice con lo sviluppo di Laplace partendo dalle righe di  $-I_3$  e proseguendo, se necessario, sviluppando lungo le colonne di  $-I_2$ , otteniamo una sottomatrice invertibile di  $A$  di ordine  $n$ . Le righe di  $A$  che formano tale sottomatrice costituiscono una base ammissibile associata alla soluzione  $x^*$ .

□

**Esempio 3.1.3.** Troviamo, se esiste, una soluzione di base ammissibile per il problema:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Alla base  $\{1, 4\}$  corrisponde la soluzione  $\bar{x} = (5, 0)^T$  che non è ammissibile perché viola il secondo vincolo. Costruiamo il problema ausiliario:

$$\begin{cases} \max & -\varepsilon \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 - \varepsilon \leq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -\varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

Per tale problema ausiliario, la base  $\{1, 2, 4\}$  è ammissibile e corrisponde alla soluzione  $(x_1, x_2, \varepsilon) = (5, 0, 3)$ . Partiamo da questa base con il simplessso primale per risolvere il problema ausiliario. La soluzione di base complementare è

$$\bar{y}_B^T = (0, 0, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (-1, 1, -3),$$

per cui 1 è l'indice uscente con  $W^1 = (-1, 0, -1)^T$ . Poiché

$$A_3 W^1 = -1, \quad A_5 W^1 = 1,$$

si ottiene che 5 è l'indice entrante, quindi la nuova base è  $\{2, 4, 5\}$ . La corrispondente matrice di base è

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

### 3.2 SIMPLESSO DUALE

e la soluzione di base è  $x = (2, 0)^\top$ ,  $\varepsilon = 0$  che è ottima per il problema ausiliario perché il valore della funzione obiettivo è 0. Dalla matrice di base ottima per il problema ausiliario, cancellando la terza riga e la terza colonna, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è la matrice di base per il problema (3.5) relativa alla base ammissibile  $\{2, 4\}$  e alla soluzione  $x = (2, 0)^\top$ .  $\square$

## 3.2 Simpleso duale

Ora descriviamo l'algoritmo del simpleso per risolvere un problema duale standard:

$$\begin{cases} \min y^\top b \\ y^\top A = c^\top \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (\mathcal{D})$$

L'algoritmo è analogo al simpleso primale con la differenza che ad ogni passo si mantiene ammissibile la soluzione di base duale e si controlla l'ammissibilità di quella primale. Se la soluzione di base primale è ammissibile, allora abbiamo trovato una coppia primale/duale di soluzioni ottime, altrimenti si cambia base. In questo caso il cambio di base è definito in modo che se la nuova soluzione di base duale è diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo diminuisce (il problema è di minimo), mentre se la nuova soluzione di base duale coincide con quella vecchia, si evita di ciclare sulle stesse basi con opportune regole anticiclo (vedi Figura 3.3).

Dimostriamo che il simpleso duale è corretto.

**Teorema 3.2.1.** *Il simpleso duale risolve  $(\mathcal{D})$  in un numero finito di iterazioni.*

**Dimostrazione.** Come nel simpleso primale si dimostra che il cambio di indici  $B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$  genera un cambio di base perché  $A_k W^h \neq 0$  (in questo caso si ha che  $A_k W^h < 0$ ).

Ad una certa iterazione consideriamo la soluzione di base duale  $\bar{y}$ . Se la soluzione di base primale  $\bar{x}$  è ammissibile, allora, per il Teorema 2.4.1,  $\bar{x}$  è ottima per il primale e  $\bar{y}$  è ottima per il duale (questo dimostra la correttezza del criterio di stop al passo 3). Se invece  $\bar{x}$  non è primale ammissibile, allora consideriamo la semiretta uscente da  $\bar{y}$  così definita:

$$y_i(\lambda) = \begin{cases} \bar{y}_i + \lambda A_k W^i & \text{se } i \in B, \\ \lambda & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \in N \setminus \{k\} \end{cases} \quad \text{con } \lambda \geq 0. \quad (3.6)$$

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

#### Algoritmo del simpleso duale

1. Trova una base  $B$  che genera una soluzione di base duale ammissibile
2. Calcola la soluzione di base primale  $\bar{x} := A_B^{-1} b_B$  e la soluzione di base duale

$$\bar{y} := \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \bar{y}_B^T := c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N := 0$$

3. **if**  $b_N - A_N \bar{x} \geq 0$  **then** STOP ( $\bar{y}$  è ottima per  $(\mathcal{D})$  e  $\bar{x}$  è ottima per  $(\mathcal{P})$ )  
**else** calcola l'indice entrante

$$k := \min\{i \in N : b_i - A_i \bar{x} < 0\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland})$$

poni  $W := -A_B^{-1}$  ed indica con  $W^i$  la  $i$ -esima colonna di  $W$

4. **if**  $A_k W^i \geq 0 \quad \forall i \in B$  **then** STOP ( $(\mathcal{D})$  ha valore ottimo  $-\infty$  e  $(\mathcal{P})$  è vuoto)

$$\textbf{else} \text{ calcola } \vartheta := \min \left\{ \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} : i \in B, A_k W^i < 0 \right\}$$

calcola l'indice uscente

$$h := \min \left\{ i \in B : A_k W^i < 0, \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} = \vartheta \right\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland})$$

aggiorna la base  $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$  e torna al passo 2

Figura 3.3: algoritmo del simpleso duale.

### 3.2 SIMPLESSO DUALE

Per ogni  $\lambda > 0$  si ha:

$$\begin{aligned}
 y(\lambda)^T b &= \sum_{i \in B} (\bar{y}_i b_i + \lambda A_k W^i b_i) + \lambda b_k \\
 &= \sum_{i \in B} \bar{y}_i b_i + \lambda A_k \sum_{i \in B} W^i b_i + \lambda b_k \\
 &= \bar{y}_B^T b_B - \lambda A_k A_B^{-1} b_B + \lambda b_k \\
 &= \bar{y}^T b - \lambda A_k \bar{x} + \lambda b_k \\
 &= \bar{y}^T b + \lambda (b_k - A_k \bar{x}) \\
 &< \bar{y}^T b
 \end{aligned}$$

Quindi il valore della funzione obiettivo diminuisce lungo la semiretta  $y(\lambda)$ .

Vediamo ora quali punti della semiretta appartengono al poliedro duale. Osserviamo che i vincoli  $y^T A = c^T$  sono soddisfatti da ogni punto della semiretta, infatti per ogni  $\lambda \geq 0$  si ha:

$$\begin{aligned}
 y(\lambda)^T A &= \sum_{i=1}^m y_i(\lambda) A_i \\
 &= \sum_{i \in B} (\bar{y}_i + \lambda A_k W^i) A_i + \lambda A_k \\
 &= \sum_{i \in B} \bar{y}_i A_i + \lambda A_k \sum_{i \in B} W^i A_i + \lambda A_k \\
 &= \bar{y}_B^T A_B - \lambda A_k \underbrace{\left( \sum_{i \in B} -W^i A_i \right)}_{=\text{matrice identità}} + \lambda A_k \\
 &= \bar{y}_B^T A_B - \lambda A_k + \lambda A_k \\
 &= c^T
 \end{aligned}$$

I vincoli  $y_i(\lambda) \geq 0$  sono soddisfatti per ogni  $\lambda \geq 0$  se  $i \in N$ , mentre, se  $i \in B$ , dai seguenti valori di  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 & \text{se } A_k W^i \geq 0, \\ \lambda \leq \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} & \text{se } A_k W^i < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Se  $A_k W^i \geq 0$  per ogni  $i \in B$ , allora tutta la semiretta  $y(\lambda)$  è contenuta nel poliedro e quindi  $y(\lambda)^T b$  tende a  $-\infty$  al crescere di  $\lambda$  (questo dimostra la correttezza del criterio di stop al passo 4).

Se, invece, esiste un indice  $i \in B$  tale che  $A_k W^i < 0$ , allora  $y(\lambda)$  è ammissibile se

$$0 \leq \lambda \leq \min \left\{ \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} : i \in B, A_k W^i < 0 \right\} = \vartheta.$$

Osserviamo che il punto ammissibile  $y(\vartheta)$  è la soluzione di base duale associata alla nuova base  $B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ , infatti:

$$\begin{aligned}
 i \in N \setminus \{k\} &\implies y_i(\vartheta) = 0 \\
 i = h &\implies y_h(\vartheta) = \bar{y}_h + \vartheta A_k W^h = \bar{y}_h - \frac{\bar{y}_h}{A_k W_h} A_k W^h = 0,
 \end{aligned}$$

ossia  $y_{N'}(\vartheta) = 0$ .

Se  $\vartheta = 0$  (caso degenere), si ottiene un cambio di base rimanendo sullo stesso vertice degenere  $\bar{y}$ , ma le regole anticiclo di Bland evitano di ritornare su una base già visitata (vedi Teorema 3.3.2).

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

Se  $\vartheta > 0$  (caso non degenere), si ottiene un nuovo vertice  $y(\vartheta)$ , adiacente al vecchio vertice  $\bar{y}$ , in cui è diminuito il valore della funzione obiettivo.

Pertanto l'algoritmo del simplesso non visita mai per due volte la stessa base. Essendo finito il numero di basi ammissibili, l'algoritmo termina dopo un numero finito di iterazioni, o trovando una coppia primale/duale di soluzioni ottime oppure dicendo che il valore ottimo del duale è  $-\infty$  (e quindi, per il teorema della dualità debole, il poliedro duale è vuoto).  $\square$

Illustriamo ora una risoluzione di un problema di PL applicando il simplesso duale.

**Esempio 3.2.1.** Risolviamo il seguente problema

$$\begin{cases} \min & 13y_3 + 9y_4 + 7y_5 \\ & -y_1 + y_3 + y_4 + y_5 = 3 \\ & -y_2 + 2y_3 + y_4 = -4 \\ & y \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

con il simplesso duale partendo dalla base  $B = \{2, 3\}$ .

**1° iterazione.** La matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

la soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = (3, -4)A_B^{-1} = (10, 3), \quad \bar{y} = (0, 10, 3, 0, 0)^T,$$

e quella primale è  $\bar{x} = (13, 0)^T$  che non è ammissibile perché

$$b_1 - A_1 \bar{x} = 13, \quad b_4 - A_4 \bar{x} = -4, \quad b_5 - A_5 \bar{x} = -6,$$

quindi l'indice che entra in base è 4. Calcoliamo i prodotti

$$A_4 W^2 = -1, \quad A_4 W^3 = -1,$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_4 W^2} = 10, \quad \frac{\bar{y}_3}{-A_4 W^3} = 3,$$

quindi l'indice uscente dalla base è 3.

**2° iterazione.** La nuova base è  $B = \{2, 4\}$ , la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione di base duale è

$$\bar{y} = (0, 7, 0, 3, 0)^T,$$

### 3.2 SIMPLESSO DUALE

e quella primale è  $\bar{x} = (9, 0)^T$  che non è ammissibile perché

$$b_1 - A_1 \bar{x} = 9, \quad b_3 - A_3 \bar{x} = 4, \quad b_5 - A_5 \bar{x} = -2,$$

quindi l'indice che entra in base è 5. Calcoliamo i prodotti

$$A_5 W^2 = -1, \quad A_5 W^4 = -1,$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_5 W^2} = 7, \quad \frac{\bar{y}_4}{-A_5 W^4} = 3,$$

quindi l'indice uscente dalla base è 4.

**3° iterazione.** La nuova base è  $B = \{2, 5\}$ , la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione di base duale è

$$\bar{y} = (0, 4, 0, 0, 3)^T,$$

e quella primale è  $\bar{x} = (7, 0)^T$  che è ammissibile perché

$$b_1 - A_1 \bar{x} = 7, \quad b_3 - A_3 \bar{x} = 6, \quad b_4 - A_4 \bar{x} = 2,$$

quindi  $(0, 4, 0, 0, 3)$  è ottima del problema (3.8).

Nella Figura 3.4 è rappresentato il poliedro primale  $Ax \leq b$ , cioè

$$\begin{cases} -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 7 \end{cases}$$

e le tre soluzioni di base primali esplorate dal simplesso. Su ognuna di tali soluzioni sono indicati i vettori ortogonali ai vincoli aderenti (cioè le righe  $A_i$  della matrice  $A$  corrispondenti ai vincoli aderenti) ed il vettore  $c$  della funzione obiettivo. Osserviamo che in tutte e tre le soluzioni di base il vettore  $c$  appartiene al cono generato dai vettori  $A_i$  ortogonali ai vincoli aderenti (cioè la soluzione di base duale è ammissibile), mentre tra le tre soluzioni di base primali, solo quella ottima, cioè  $(7, 0)$ , è ammissibile.  $\square$

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

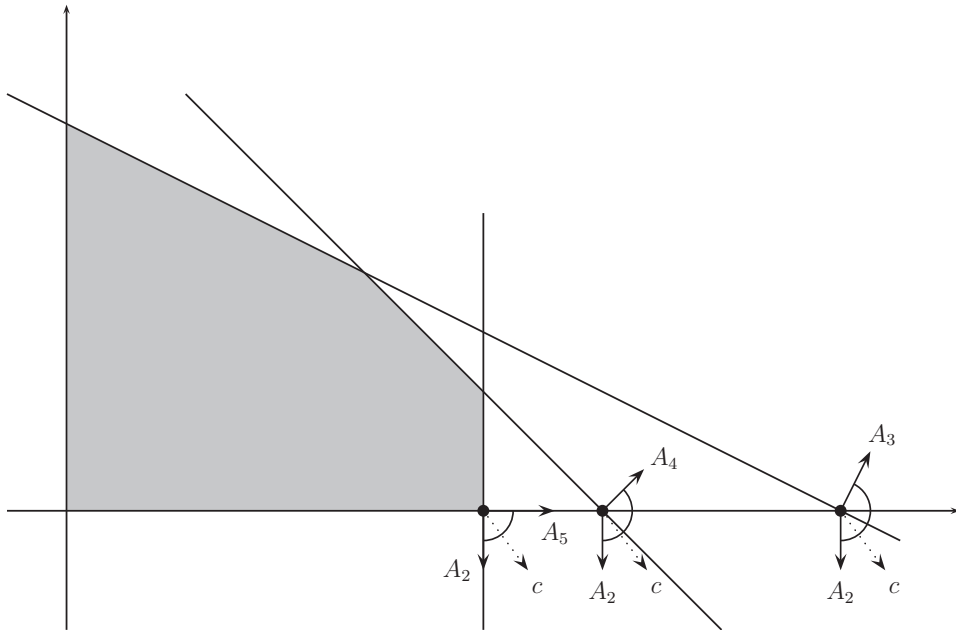


Figura 3.4: applicazione del simplesso duale al problema (3.8).



### Problema ausiliario duale

Consideriamo il problema in forma duale:

$$\begin{cases} \min & y^\top b \\ & y^\top A = c^\top \\ & y \geq 0 \end{cases} \quad (\mathcal{D})$$

Senza ledere la generalità della trattazione possiamo supporre che  $c \geq 0$ , cambiando eventualmente segno alle colonne di  $A$  relative alle componenti negative di  $c$ . Inoltre possiamo supporre che nel sistema  $y^\top A = c^\top$  non ci siano equazioni ridondanti. Per trovare una base ammissibile di  $(\mathcal{D})$ , al passo 1 del simplesso duale, si costruisce il cosiddetto problema ausiliario duale:

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\ & y^\top A + \varepsilon^\top = c^\top \\ & y \geq 0 \\ & \varepsilon \geq 0 \end{cases} \quad (\mathcal{D}_{aux})$$

La base formata dagli indici relativi alle variabili ausiliarie  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , con la matrice identità come matrice di base, è una base ammissibile per il problema ausiliario, infatti la corrispondente soluzione di base è  $\bar{y} = 0$ ,  $\bar{\varepsilon} = c \geq 0$ . A partire da tale base ammissibile, possiamo applicare il simplesso duale per risolvere il problema ausiliario. Il valore ottimo del problema ausiliario (che è compreso tra 0 e  $\sum_{i=1}^n c_i$ ) stabilisce se esiste una base ammissibile per il problema  $(\mathcal{D})$ .

#### Teorema 3.2.2.

1. Se il valore ottimo di  $(\mathcal{D}_{aux})$  è  $> 0$  allora  $(\mathcal{D})$  non ha soluzioni ammissibili.
2. Se il valore ottimo di  $(\mathcal{D}_{aux})$  è  $= 0$  allora c'è una base ammissibile per  $(\mathcal{D})$  che si costruisce a partire da una base ottima per  $(\mathcal{D}_{aux})$ .

#### Dimostrazione.

1. Se, per assurdo,  $(\mathcal{D})$  avesse una soluzione ammissibile  $\bar{y}$ , allora  $y = \bar{y}$  e  $\varepsilon = 0$  sarebbe ammissibile per  $(\mathcal{D}_{aux})$  con la funzione obiettivo che vale 0, ma è assurdo perché per ipotesi il valore minimo di  $(\mathcal{D}_{aux})$  è positivo.
2. Supponiamo che  $B$  sia la base ottima di  $(\mathcal{D}_{aux})$ . Se  $B$  è formata solo da indici relativi alle variabili  $y$ , allora  $B$  è una base ammissibile anche di  $(\mathcal{D})$ . Nel caso in cui  $B$  ha qualche indice relativo alle variabili ausiliarie  $\varepsilon$ , indichiamo con  $M$  l'inversa della matrice di base, allora si ha:

$$A M = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} (M^y, M^\varepsilon) = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ * & H \end{array} \right),$$

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

dove  $A_1$  è formata dalle righe di  $A$  che appartengono alla base  $B$ ,  $A_2$  dalle righe di  $A$  che non appartengono a  $B$ , le colonne di  $M^y$  sono relative alle variabili  $y$  e le colonne di  $M^\varepsilon$  alle variabili  $\varepsilon$ . Osserviamo che la matrice  $H$  non può essere nulla, altrimenti una colonna di  $A$  sarebbe combinazione lineare delle altre colonne di  $A$  e quindi sarebbe ridondante. Perciò esiste una riga  $A_k$  di  $A_2$  che ha prodotto scalare diverso da zero con una colonna  $M^h$  di  $M^\varepsilon$ . Allora sostituendo nella base  $B$  l'indice  $h$  (corrispondente ad una variabile  $\varepsilon$ ) con l'indice  $k$  (corrisponde ad una variabile  $y$ ) troviamo una nuova base ammissibile per  $(\mathcal{D}_{aux})$  relativa alla soluzione ottima di valore 0. Iterando questa procedura si arriva ad una base costituita solo da indici relativi alle variabili  $y$ , cioè una base ammissibile per  $(\mathcal{D})$ .  $\square$

**Esempio 3.2.2.** Troviamo una base ammissibile per il problema in forma duale:

$$\begin{cases} \min & 8y_1 - y_2 - 5y_3 + 8y_4 \\ & -y_3 - 2y_4 = 0 \\ & y_1 - y_2 + 3y_4 = 1 \\ & y \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Costruiamo il problema ausiliario:

$$\begin{cases} \min & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ & -y_3 - 2y_4 + \varepsilon_1 = 0 \\ & y_1 - y_2 + 3y_4 + \varepsilon_2 = 1 \\ & y \geq 0 \\ & \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

Applichiamo il simplesso duale al problema ausiliario scegliendo come base iniziale  $\{5, 6\}$ , con soluzione di base associata  $y = (0, 0, 0, 0)^\top$ ,  $\varepsilon = (0, 1)^\top$ . La soluzione di base complementare è  $\bar{x} = (1, 1)^\top$  che non è ammissibile:

$$A_1 \bar{x} = 1 > 0,$$

dunque  $k = 1$  è l'indice entrante. Inoltre  $A_1 W^5 = 0$ ,  $A_1 W^6 = -1$ , dunque  $h = 6$  è l'indice uscente. La nuova base  $\{1, 5\}$  corrisponde alla soluzione di base  $y = (1, 0, 0, 0)^\top$ ,  $\varepsilon = (0, 0)^\top$  che è ottima per il problema ausiliario con valore 0.

Per trovare una base duale ammissibile, dobbiamo effettuare un passo forzante perché 5 è un indice relativo alla variabile ausiliaria  $\varepsilon_1$ . L'inversa della matrice di base è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$AM = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ \hline 0 & \textcircled{-1} \\ 3 & -2 \end{array} \right)$$

Poiché  $A_3 M^5 = -1$ , possiamo effettuare un cambio di base tra gli indici 3 e 5 ottenendo  $\{1, 3\}$  come base ammissibile per il problema (3.9), corrispondente alla soluzione  $y = (1, 0, 0, 0)^\top$ . Osserviamo anche che  $A_4 M^5 = -2$ , per cui l'indice 5 può essere scambiato anche con l'indice 4 e quindi un'altra base ammissibile per il problema (3.9) è  $\{1, 4\}$ , sempre relativa alla soluzione  $y = (1, 0, 0, 0)^\top$ .  $\square$

### 3.3 Regole anticiclo di Bland

Mostriamo ora un problema di PL in cui l'algoritmo del simplesso (senza l'uso delle regole anticiclo di Bland) cicla sulle basi di un vertice degenerare. L'algoritmo cicla anche scegliendo come indice entrante quello con lo scarto primale "più negativo", ossia l'indice entrante  $k$  è quello per cui vale

$$b_k - A_k \bar{x} = \min_{i \in N} (b_i - A_i \bar{x}),$$

e come indice uscente quello dato dalla regola di Bland.

**Esempio 3.3.1.** Consideriamo il seguente problema di PL in forma duale standard:

$$\begin{cases} \min & -\frac{3}{4}y_1 + 150y_2 - \frac{1}{50}y_3 + 6y_4 \\ & \frac{1}{4}y_1 - 60y_2 - \frac{1}{25}y_3 + 9y_4 + y_5 = 0 \\ & \frac{1}{2}y_1 - 90y_2 - \frac{1}{50}y_3 + 3y_4 + y_6 = 0 \\ & y_3 + y_7 = 1 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Iniziamo la risoluzione con il simplesso duale a partire dalla base  $B = \{5, 6, 7\}$ .

**1° iterazione.** Gli indici di base e non di base sono rispettivamente:

$$B = \{5, 6, 7\}, \quad N = \{1, 2, 3, 4\}.$$

La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$$

Le soluzioni di base primale e duale sono, rispettivamente:

$$\bar{x} = (0, 0, 0)^\top \quad \bar{y} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^\top.$$

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

Il vettore degli scarti primali è

$$b_N - A_N \bar{x} = \left( -\frac{3}{4}, 150, -\frac{1}{50}, 6 \right)^T,$$

la componente minima è la prima, quindi l'indice entrante è  $k = 1$ . Calcoliamo

$$A_1 W^5 = -\frac{1}{4}, \quad A_1 W^6 = -\frac{1}{2}, \quad A_1 W^7 = 0,$$

i rapporti sono

$$\frac{\bar{y}_5}{-A_1 W^5} = 0, \quad \frac{\bar{y}_6}{-A_1 W^6} = 0,$$

quindi, per la regola di Bland, l'indice uscente è  $h = 5$ .

**2° iterazione.** Gli indici di base e non di base sono rispettivamente:

$$B = \{1, 6, 7\} \quad N = \{2, 3, 4, 5\}.$$

La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni di base primale e duale sono, rispettivamente:

$$\bar{x} = (-3, 0, 0)^T \quad \bar{y} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Il vettore degli scarti primali è

$$b_N - A_N \bar{x} = \left( -30, -\frac{7}{50}, 33, 3 \right)^T,$$

la componente minima è la prima, quindi l'indice entrante è  $k = 2$ . Calcoliamo

$$A_2 W^1 = 240, \quad A_2 W^6 = -30, \quad A_2 W^7 = 0,$$

l'unico rapporto è

$$\frac{\bar{y}_6}{-A_2 W^6} = 0,$$

quindi l'indice uscente è  $h = 6$ .

**3° iterazione.** Gli indici di base e non di base sono rispettivamente:

$$B = \{1, 2, 7\} \quad N = \{3, 4, 5, 6\}.$$

### 3.3 REGOLE ANTICICLO DI BLAND

La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ -60 & -90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -1/15 & 0 \\ 8 & 1/30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni di base primale e duale sono, rispettivamente:

$$\bar{x} = (-1, -1, 0)^T \quad \bar{y} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Il vettore degli scarti primali è

$$b_N - A_N \bar{x} = \left( -\frac{2}{25}, 18, 1, 1 \right)^T,$$

l'unica componente negativa è la prima, quindi l'indice entrante è  $k = 3$ . Calcoliamo

$$A_3 W^1 = -\frac{8}{25}, \quad A_3 W^2 = -\frac{1}{500}, \quad A_3 W^7 = -1,$$

i rapporti sono

$$\frac{\bar{y}_1}{-A_3 W^1} = 0, \quad \frac{\bar{y}_2}{-A_3 W^2} = 0, \quad \frac{\bar{y}_7}{-A_3 W^7} = 1$$

quindi, per la regola di Bland, l'indice uscente è  $h = 1$ .

**4° iterazione.** Gli indici di base e non di base sono rispettivamente:

$$B = \{2, 3, 7\} \quad N = \{1, 4, 5, 6\}.$$

La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} -60 & -90 & 0 \\ -1/25 & -1/50 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/120 & -75/2 & 75/2 \\ -1/60 & 25 & -25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni di base primale e duale sono, rispettivamente:

$$\bar{x} = (2, -3, 0)^T \quad \bar{y} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Il vettore degli scarti primali è

$$b_N - A_N \bar{x} = \left( \frac{1}{4}, -3, -2, 3 \right)^T,$$

la minima componente è la seconda, quindi l'indice entrante è  $k = 4$ . Calcoliamo

$$A_4 W^2 = -\frac{1}{40}, \quad A_4 W^3 = \frac{525}{2}, \quad A_4 W^7 = -\frac{525}{2},$$

i rapporti sono

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_4 W^2} = 0, \quad \frac{\bar{y}_7}{-A_4 W^7} = \frac{2}{525}$$

quindi l'indice uscente è  $h = 2$ .

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

**5° iterazione.** Gli indici di base e non di base sono rispettivamente:

$$B = \{3, 4, 7\} \quad N = \{1, 2, 5, 6\}.$$

La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} -1/25 & -1/50 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 50 & 1/3 & -50 \\ -150 & -2/3 & 150 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni di base primale e duale sono, rispettivamente:

$$\bar{x} = (1, -1, 0)^T \quad \bar{y} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Il vettore degli scarti primali è

$$b_N - A_N \bar{x} = \left( -\frac{1}{2}, 120, -1, 1 \right)^T,$$

la minima componente è la terza, quindi l'indice entrante è  $k = 5$ . Calcoliamo

$$A_5 W^3 = -50, \quad A_5 W^4 = -\frac{1}{3}, \quad A_5 W^7 = 50,$$

i rapporti sono

$$\frac{\bar{y}_3}{-A_5 W^3} = 0, \quad \frac{\bar{y}_4}{-A_5 W^4} = 0,$$

quindi, per la regola di Bland, l'indice uscente è  $h = 3$ .

**6° iterazione.** Gli indici di base e non di base sono rispettivamente:

$$B = \{4, 5, 7\} \quad N = \{1, 2, 3, 6\}.$$

La matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni di base primale e duale sono, rispettivamente:

$$\bar{x} = (0, 2, 0)^T \quad \bar{y} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Il vettore degli scarti primali è

$$b_N - A_N \bar{x} = \left( -\frac{7}{4}, 330, \frac{1}{50}, -2 \right)^T,$$

### 3.3 REGOLE ANTICICLO DI BLAND

la minima componente è la quarta, quindi l'indice entrante è  $k = 6$ . Calcoliamo

$$A_6 W^4 = -\frac{1}{3}, \quad A_6 W^5 = 3, \quad A_6 W^7 = 0,$$

l'unico rapporto è

$$\frac{\bar{y}_4}{-A_6 W^4} = 0,$$

quindi l'indice uscente è  $h = 4$ .

**7° iterazione.** La nuova base è  $B = \{5, 6, 7\}$  che coincide con la base iniziale.

□

Dimostriamo ora che con le regole anticiclo di Bland il simplesso non cicla.

**Teorema 3.3.1.** *L'algoritmo del simplesso primale con le regole anticiclo di Bland non cicla.*

**Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che il simplesso primale produca una sequenza di basi

$$B_1, B_2, \dots, B_\ell = B_1$$

corrispondenti alla stessa soluzione di base primale degenerare. Consideriamo gli indici che entrano ed escono da una delle basi della sequenza:

$$\mathcal{J} = \left\{ i : \begin{array}{l} \exists p \in \{1, \dots, \ell\} \text{ tale che } i \in B_p \\ \exists q \in \{1, \dots, \ell\} \text{ tale che } i \notin B_q \end{array} \right\}.$$

Chiamiamo  $r$  il massimo indice dell'insieme  $\mathcal{J}$ , cioè  $r = \max_{i \in \mathcal{J}} i$ . Indichiamo con  $B'$  una base della sequenza in cui l'indice  $r$  sia l'indice entrante e con  $B''$  una base della sequenza in cui  $r$  sia l'indice uscente. L'indice uscente dalla base  $B'$  è indicato con  $s$ . Osserviamo che si deve avere  $s \in \mathcal{J}$  e  $s < r$ .

Alle basi  $B'$  e  $B''$  sono associate le soluzioni di base primale  $x'$ ,  $x''$  e duale  $y'$ ,  $y''$ :

$$\begin{aligned} x' &= A_{B'}^{-1} b_{B'} & y_{B'}'^T &= c^T A_{B'}^{-1}, & y_{N'}' &= 0 \\ x'' &= A_{B''}^{-1} b_{B''} & y_{B''}''^T &= c^T A_{B''}^{-1}, & y_{N''}'' &= 0 \end{aligned}$$

Poiché  $B'$  e  $B''$  appartengono alla sequenza di basi  $B_1, B_2, \dots, B_\ell$ , esse corrispondono alla stessa soluzione di base primale, ossia  $x' = x''$ .

Poiché l'indice  $s$  esce dalla base  $B'$ , si ha  $y_s' < 0$ . Indicando con  $W^s$  l'opposta della colonna  $s$ -esima di  $A_{B'}^{-1}$ , segue che

$$-y_s' = c^T W^s = y_{B''}''^T A_{B''} W^s = \sum_{i \in B''} y_i'' A_i W^s > 0.$$

Da questa disuguaglianza arriviamo ad un assurdo facendo vedere che tutti i termini nella sommatoria della relazione precedente sono  $\leq 0$ . Distinguiamo tre casi:

### 3. ALGORITMO DEL SIMPLESSO

$i \in B''$ ,  $i < r$ . Poiché  $r$  è l'indice uscente (secondo la regola di Bland) da  $B''$ , si ha

$$r = \min\{j \in B'' : y_j'' < 0\},$$

quindi  $y_i'' \geq 0$ .

Poiché  $r$  è l'indice entrante (secondo la regola di Bland) in  $B'$ , si ha

$$r = \min\{j \notin B' : A_j W^s > 0, \quad b_j - A_j x' = 0\}.$$

Inoltre  $i \in B''$  per cui  $b_i - A_i x' = b_i - A_i x'' = 0$ . Quindi

- se  $i \notin B'$ , allora  $A_i W^s \leq 0$  perché  $i < r$ ;
- se  $i \in B'$ , allora per costruzione  $A_i W^s \leq 0$ .

Perciò  $y_i'' A_i W^s \leq 0$ .

$i \in B''$ ,  $i = r$ . Poiché  $r$  è l'indice uscente da  $B''$ , si ha  $y_r'' < 0$ . D'altra parte  $r$  è l'indice entrante in  $B'$  quindi  $A_r W^s > 0$  e perciò  $y_r'' A_r W^s < 0$ .

$i \in B''$ ,  $i > r$ . Poiché  $r$  è il massimo degli indici uscenti,  $i$  non può essere l'indice uscente da nessuna base  $B_1, \dots, B_\ell$ , e in particolare  $i \neq s$ . Inoltre  $i$  appartiene a tutte le basi  $B_1, \dots, B_\ell$ , e in particolare  $i \in B'$ . Allora  $A_i W^s = 0$  e quindi  $y_i'' A_i W^s = 0$ .

Abbiamo ottenuto una contraddizione che dimostra la tesi. □

**Teorema 3.3.2.** *L'algoritmo del simpleso duale con le regole anticiclo di Bland non cicla.*

**Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che il simpleso duale produca una sequenza di basi

$$B_1, B_2, \dots, B_\ell = B_1$$

corrispondenti alla stessa soluzione di base duale degenerare. Consideriamo gli indici che entrano ed escono da una delle basi della sequenza:

$$\mathcal{J} = \left\{ i : \begin{array}{l} \exists p \in \{1, \dots, \ell\} \text{ tale che } i \in B_p \\ \exists q \in \{1, \dots, \ell\} \text{ tale che } i \notin B_q \end{array} \right\}.$$

Chiamiamo  $r$  il massimo indice dell'insieme  $\mathcal{J}$ , cioè  $r = \max_{i \in \mathcal{J}} i$ . Indichiamo con  $B'$  una base della sequenza in cui l'indice  $r$  sia l'indice uscente e con  $B''$  una base della sequenza in cui  $r$  sia l'indice entrante. L'indice entrante nella base  $B'$  è indicato con  $s$ . Osserviamo che si deve avere  $s \in \mathcal{J}$  e  $s < r$ .

Alle basi  $B'$  e  $B''$  sono associate le soluzioni di base primale  $x'$ ,  $x''$  e duale  $y'$ ,  $y''$ :

$$\begin{array}{ll} x' = A_{B'}^{-1} b_{B'} & y'_{B'} = c^T A_{B'}^{-1}, \quad y'_{N'} = 0 \\ x'' = A_{B''}^{-1} b_{B''} & y''_{B''} = c^T A_{B''}^{-1}, \quad y''_{N''} = 0 \end{array}$$

Poiché  $B'$  e  $B''$  appartengono alla sequenza di basi  $B_1, B_2, \dots, B_\ell$ , esse corrispondono alla stessa soluzione di base duale, ossia  $y' = y''$ .



### 3.3 REGOLE ANTICICLO DI BLAND

Poiché l'indice  $s$  entra nella base  $B'$ , si ha  $b_s - A_s x' < 0$ . Indicando con  $W^i$  l'opposta della colonna  $i$ -esima di  $A_{B'}^{-1}$ , segue che

$$0 > b_s - A_s x' = b_s - A_s \sum_{i \in B'} (-W^i) b_i = b_s + \sum_{i \in B'} A_s W^i b_i. \quad (3.10)$$

Inoltre possiamo scrivere la matrice identità nel modo seguente:

$$I = \sum_{i \in B'} (-W^i) A_i,$$

quindi

$$A_s x'' = A_s \left( \sum_{i \in B'} (-W^i) A_i \right) x'' = - \sum_{i \in B'} A_s W^i A_i x''. \quad (3.11)$$

Dalle relazioni (3.10) e (3.11) segue che

$$\begin{aligned} 0 &> b_s + \sum_{i \in B'} A_s W^i b_i \\ &= b_s - A_s x'' + \sum_{i \in B'} A_s W^i b_i - \sum_{i \in B'} A_s W^i A_i x'' \\ &= b_s - A_s x'' + \sum_{i \in B'} A_s W^i (b_i - A_i x''). \end{aligned}$$

Poiché  $r$  è l'indice entrante in  $B''$ , secondo la regola di Bland, e  $s < r$ , si ha che  $b_s - A_s x'' \geq 0$ . Perciò otteniamo:

$$0 > \sum_{i \in B'} A_s W^i (b_i - A_i x'').$$

Da questa disuguaglianza arriviamo ad un assurdo facendo vedere che tutti i termini nella sommatoria della relazione precedente sono  $\geq 0$ . Distinguiamo tre casi:

$i \in B'$ ,  $i < r$ . Se  $i \in B''$ , allora  $b_i - A_i x'' = 0$  e quindi anche  $A_s W^i (b_i - A_i x'') = 0$ .

Se  $i \notin B''$ , allora  $y'_i = y''_i = 0$ . Poiché  $r$  entra in  $B''$  si ha

$$r = \min\{j \notin B'' : b_j - A_j x'' < 0\}.$$

Quindi  $b_i - A_i x'' \geq 0$  perché  $i < r$ .

Inoltre  $r$  esce da  $B'$ , cioè

$$r = \min\{j \in B' : y'_j = 0, A_s W^j < 0\}.$$

Quindi  $A_s W^i \geq 0$  perché  $i < r$ .

Riassumendo si ha che  $A_s W^i (b_i - A_i x'') = 0$ .

$i \in B'$ ,  $i = r$ . Poiché  $r$  è l'indice entrante in  $B''$ , si ha  $b_r - A_r x'' < 0$ . D'altra parte  $r$  è l'indice uscente da  $B'$  quindi  $A_s W^r < 0$  e perciò  $A_s W^r (b_r - A_r x'') > 0$ .

$i \in B'$ ,  $i > r$ . Poiché  $r$  è il massimo degli indici uscenti,  $i$  non può essere l'indice uscente da nessuna base  $B_1, \dots, B_\ell$  e quindi appartiene a tutte le basi  $B_1, \dots, B_\ell$ , in particolare  $i \in B''$ , quindi  $b_i - A_i x'' = 0$  e perciò anche  $A_s W^i (b_i - A_i x'') = 0$ .

Abbiamo ottenuto una contraddizione che dimostra la tesi.  $\square$



# Capitolo 4

## Esercizi di PL

1. Formulare il problema della risoluzione di un sistema di disequazioni lineari come problema di PL.
2. Scrivere il duale dei seguenti problemi:

$$\begin{cases} \min & 2x_1 - x_2 \\ & x_1 \geq 5 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -2x_1 - 3x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_4 \leq 3 \\ & 3x_1 + x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min & 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

3. Dimostrare che l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y^\top b - c^\top x \leq 0, \quad Ax \leq b, \quad y^\top A = c, \quad y \geq 0\}$$

è non vuoto se e solo se il seguente problema di PL ha ottimo finito:

$$\begin{cases} \min & v^\top b - c^\top w \\ & u^\top b - A^\top w \geq 0 \\ & -u^\top c + v^\top A = 0 \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0. \end{cases}$$

#### 4. ESERCIZI DI PL

4. Dato il problema

$$\begin{cases} \max & 3x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & -x_1 + x_2 \geq -3 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

verificare, senza risoluzione geometrica, se  $(11/3, 7/3)$  è una soluzione ottima.

5. Come nell'esercizio 4 per il problema

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

con il vettore  $(7/2, 5/2)$ .

6. Come nell'esercizio 4 per il problema

$$\begin{cases} \max & -2x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 10x_7 \\ & x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 + x_6 - 4x_7 = 5 \\ & x_1 + 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 3x_7 \geq -1 \\ & 5x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 - 2x_7 \geq 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

con il vettore  $(6, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$ .

7. Sapendo che  $(0, 5, 0, 5)$  è soluzione ottima del problema:

$$\begin{cases} \min & 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 \\ & 5 \leq 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 20 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ & x_1 + x_2 + x_4 \geq -5 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

trovare la soluzione ottima del duale.

8. Costruire, se ne esistono, esempi di PL tali che sia:

- primale illimitato e duale inammissibile,
- primale e duale inammissibili,
- primale con ottimo finito e duale non ammissibile,
- primale e duale illimitati,

#### 4. ESERCIZI DI PL

- primale ammissibile e duale non ammissibile.

9. Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ & 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Mostrare che la soluzione  $(0, 1/2, 0, 5/2, 3/2)$  è ottima.

10. Sia dato il problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 = 3 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- Verificare che la base  $B = \{1, 2, 3\}$  è ottima.
  - Determinare la soluzione ottima del duale.
  - In quali intervalli possono variare i termini noti senza che la base  $B$  perda l'ottimalità?
  - In quali intervalli possono variare i costi senza che la base  $B$  perda l'ottimalità?
11. Sia dato un problema di PL duale standard e sia  $y'$  una soluzione ottima del suo duale. Si consideri il problema modificato ottenuto aggiungendo a  $c$  la  $k$ -esima riga di  $A$  moltiplicata per il numero reale  $m$ . Dimostrare che la soluzione  $y''$ , ottenuta da  $y'$  aggiungendo  $m$  alla  $k$ -esima componente, è ottima per il duale del problema modificato.

12. Sia dato il problema di PL:

$$\begin{cases} \max & 8x_1 - 9x_2 \\ & -x_1 \leq 1 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 6 \end{cases}$$

In corrispondenza della base  $\{2, 5\}$  trovare le soluzioni di base primale e duale. Sono ammissibili? Sono ottime?

13. Tra gli insiemi di seguito elencati, quale è un poliedro e quale no?

#### 4. ESERCIZI DI PL

- (a)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_j| \leq 1 \quad j = 1, 2, 3\}$
- (b)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^3 |x_j| \leq 1\}$
- (c)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1\}$
- (d)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq |x_2| \leq |x_3|\}$
- (e)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq |x_2| \leq |x_3| \leq 1\}$
- (f)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : \left| \sum_{j=1}^3 x_j \right| \leq 1\}$
- (g)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : \left| \sum_{j=1}^3 x_j \right| \leq 1, \quad |x_j| \leq 2, \quad j = 1, 2, 3\}.$

14. Sia dato il problema di PL:

$$\begin{cases} \min & 4 y_1 + 8 y_2 + 2 y_3 + 9 y_4 + 3 y_5 + 7 y_6 \\ & -3 y_1 + y_2 - y_3 + 3 y_4 + y_5 - 2 y_6 = -5 \\ & y_1 - 5 y_2 + y_3 + 2 y_4 + y_6 = 8 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

In corrispondenza della base  $\{5, 6\}$  trovare le soluzioni di base primale e duale. Sono ammissibili? Sono ottime?

15. Dato un cono  $P$  con vertice nell'origine. È vero o falso che esiste un vettore  $c$  tale che

$$0 < \min_{x \in P} c^\top x < +\infty?$$

16. Consideriamo i due problemi

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax \geq b \end{cases} \quad (P)$$

e

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & a^\top x \geq \beta \end{cases} \quad (\hat{P})$$

Sia  $x^0$  una soluzione ottima di  $(P)$  tale che  $a^\top x^0 < \beta$ . È vero o falso che  $a^\top \hat{x} = \beta$  per ogni soluzione ottima  $\hat{x}$  di  $(\hat{P})$ ?

17. Dire se è vero o falso che il duale del problema

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

possiede ottimo finito qualunque siano il vettore  $c$  e la matrice  $A$ .

#### 4. ESERCIZI DI PL

18. Sia dato il problema di PL:

$$\begin{cases} \max & x_1 - 4 x_2 \\ & -x_1 \leq 2 \\ & -x_1 - 2 x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 5 x_2 \leq 17 \\ & 2 x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 2 x_1 - 3 x_2 \leq 10 \\ & x_1 - 3 x_2 \leq 12 \end{cases}$$

In corrispondenza della base  $\{5, 6\}$  trovare le soluzioni di base primale e duale. Sono ammissibili? Sono ottime?

19. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \end{cases}$$

Scrivere il suo duale e dimostrare che se  $\{x : Ax = b\} \neq \emptyset$ , allora il problema ha ottimo finito se e solo se  $c$  può essere espresso come combinazione lineare delle righe di  $A$ . Dimostrare inoltre che  $c^\top x$  è costante oppure non è limitata inferiormente su  $\{x : Ax = b\}$ .

20. Scrivere il duale di

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq a \end{cases}$$

21. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \max & c^\top x \\ & \ell \leq Ax \leq u \end{cases}$$

Scrivere il duale di tale problema e le condizioni di ottimalità per il primale ed il duale. Quali condizioni su  $A$  garantiscono che il duale ha regione ammissibile non vuota?

22. Scrivere il duale del seguente problema

$$\begin{cases} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1 \\ & \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \geq b_2 \\ & \sum_{j=1}^n a_{3j} x_j \leq b_3 \\ & \ell_j \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

#### 4. ESERCIZI DI PL

23. Dato un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  e detto  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un suo generico elemento, indicare un metodo per determinare un confine superiore dei valori assunti dalla prima coordinata  $x_1$ , utilizzando il teorema fondamentale della dualità.
24. Sia dato il seguente problema

$$\begin{cases} \min & c^\top x - y^\top b \\ & Ax \geq b \\ & y^\top A \leq c^\top \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0. \end{cases}$$

Dimostrare che o il problema ha regione ammissibile vuota o il minimo del problema è zero.

25. Dato il problema

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax + y = b \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

ove  $b > 0, c \geq 0$  se ne scriva il duale e si provi che questo ha soluzione ottima unica. Si trovi tale soluzione ottima.

26. Sia dato il problema di PL:

$$\begin{cases} \max & -5x_1 - 9x_2 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 9 \\ & -2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 4x_2 \leq 14 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & 2x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ & -5x_1 - 2x_2 \leq 15 \end{cases}$$

In corrispondenza della base  $\{1, 2\}$  trovare le soluzioni di base primale e duale. Sono ammissibili? Sono ottime?

27. Si consideri un problema di PL duale standard e si supponga che il minimo esista. Quali modifiche subisce una soluzione ottima del suo duale se
- ambo i membri di un'equazione di vincolo vengono moltiplicati per uno scalare  $\mu \neq 0$ ?
  - la  $r$ -esima equazione di vincolo viene aggiunta  $\mu \neq 0$  volte alla  $i$ -esima?
28. Dimostrare che, tra le seguenti coppie di insiemi, uno ed uno solo non è vuoto, qualunque siano le matrici ed i vettori indicati



#### 4. ESERCIZI DI PL

- (a)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq c, x \geq 0\}$ ;  $\{y \in \mathbb{R}^m : y^\top A \geq 0, c^\top y < 0, y \geq 0\}$   
 (b)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0, Ax \neq 0, x \geq 0\}$ ;  $\{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \geq 0, y > 0\}$   
 (c)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0, x \geq 0\}$ ;  $\{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \geq 0, y \neq 0, y \geq 0\}$   
 (d)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax < 0, x > 0\}$ ;  
 $\{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \geq 0, y \geq 0, y \neq 0\} \cup \{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \geq 0, A^\top y \neq 0, y \geq 0\}$ .
29. Dimostrare che il sistema  $Ax \leq b$  ha soluzioni non negative, se e solo se  $\forall y \geq 0$  tale che  $A^\top y \geq 0$  si ha  $b^\top y \geq 0$ .
30. Data una matrice  $A$  definita positiva, dimostrare che il sistema  $Ax \geq 0$  ha una soluzione  $x \neq 0$  tale che  $x \geq 0$ .
31. Dimostrare che dei seguenti sistemi uno ed uno solo ha soluzione

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax \leq b \\ y^\top A = 0 \\ y^\top b < 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Dimostrare poi che, se  $A$  è una matrice quadrata invertibile, allora il primo sistema ha sempre soluzione.

32. Dimostrare, dei due sistemi seguenti, uno ed uno solo ha soluzione

$$\text{I } \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{II } \left\{ \begin{array}{l} A^\top y \geq 0 \\ b^\top y < 0 \end{array} \right.$$

Dimostrare poi che I è in alternativa anche con

$$\text{III } \left\{ \begin{array}{l} A^\top y \geq 0 \\ b^\top y = -1 \end{array} \right.$$

33. Sia  $A$  una matrice quadrata.

a) dimostrare che dei seguenti sistemi uno ed uno solo è possibile:

$$S = \{x : Ax = 0, x \geq 0, x \neq 0\} \quad S' = \{y : A^\top y > 0\}.$$

b) utilizzando (a), provare che se il determinante di  $A$  è diverso da 0, allora il sistema  $S'$  è possibile.

34. Sia dato il problema di PL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad 7y_1 - 42y_2 + 15y_3 + 9y_4 + 14y_5 + 6y_6 - 35y_7 \\ y_1 - 6y_2 + 2y_3 + y_4 + y_5 - 5y_7 = 7 \\ -7y_2 + y_3 + y_4 + 2y_5 + y_6 - 7y_7 = 6 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

In corrispondenza della base  $\{1, 5\}$  trovare le soluzioni di base primale e duale. Sono ammissibili? Sono ottime?

#### 4. ESERCIZI DI PL

35. Si consideri il seguente problema

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij} x_j = b_j & i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Se ne scriva il duale e si studino le soluzioni ottime del problema dato.

36. Risolvere con l'algoritmo del simplesso i seguenti problemi di PL:

(a)

$$\begin{cases} \max x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \min -5x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 9x_4 - 15x_5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 11 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} \max 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} \max x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 6x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases}$$

#### 4. ESERCIZI DI PL

(f)

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & 6x_1 - x_2 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

(g)

$$\begin{cases} \min & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & 0 \leq x_1 \leq 2 \end{cases}$$

37. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare una base che sia ammissibile per il suo duale. Eseguire quindi l'algoritmo del simplesso.

38. Determinare le soluzioni ottime del seguente problema:

$$\begin{cases} \min & x_4 \\ & x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

39. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 \leq 7 \\ & 3x_2 \leq 4 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 \leq 8 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Risolverlo mediante l'algoritmo del simplesso fornendo una interpretazione geometrica dei passi effettuati.

#### 4. ESERCIZI DI PL

40. Sia dato il problema

$$\begin{cases} \min & 2x_1 + 3x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \leq \xi \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Al variare di  $\xi$  in  $\mathbb{R}$  si determinino le soluzioni di base e si dica quale fra queste è la soluzione ottima.
- (b) Si consideri il caso  $\xi > 2$ . Si dica se il duale ha un'unica soluzione ottima e perché.

41. Dire per quali valori di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  i problemi

$$\begin{cases} \min & x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \min & x_1 + x_2 \\ & (2\lambda_1 + \lambda_2)x_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

hanno lo stesso minimo o punti di minimo.

42. Si consideri la funzione  $F(\alpha) = \begin{cases} \min & x_1 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & (1 + \alpha)x_1 - x_2 \geq \alpha - 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

- (a) Determinare i punti di ottimo del problema, al variare di  $\alpha$ .
- (b) Disegnare il grafico di  $F(\alpha)$ .

43. È dato il problema

$$\begin{cases} \min & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq b_1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq b_2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Trasformato il poliedro in forma duale standard determinare  $c_1, c_2, b_1, b_2$  in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

- (a)  $(1, 0, 1, 0)$  e  $(1/2, 1/4, 1/4, 0)$  sono soluzioni ottime.
- (b)  $(0, -1)$  è soluzione ottima del duale.

44. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ & x_1 + a x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

#### 4. ESERCIZI DI PL

- (a) Porre  $a = 1/3$  e determinare la soluzione di base  $\{1, 2\}$ ; dire per quali valori del vettore  $c$  tale soluzione è l'unica soluzione ottima e determinare il vettore  $c$  in modo che  $\bar{x}$  sia una soluzione ottima non unica del programma dato. Verificare che esistono, a meno di una costante, due possibilità e dare di ciò una giustificazione geometrica nel piano.
- (b) Posto  $c_1 = -9, c_2 = -3$ , dire per quali valori di  $a$  il duale ammette ottimo finito e per quali ha regione ammissibile vuota.

45. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min & -3x_1 - x_2 \\ & x_1 + ax_2 \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Si studi, al variare di  $a$ , il comportamento delle soluzioni ottime.
- (b) Dire per quali valori di  $a$  il duale del problema dato ammette ottimo finito e per quali ha regione ammissibile vuota.

46. Sia dato il seguente problema

$$\begin{cases} \min & -2x_1 - x_2 \\ & -4x_1 + x_2 \leq 1 \\ & \alpha x_1 + (\alpha - 3)x_2 \leq \alpha \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Risolvere con l'algoritmo del simplesso per  $\alpha = 1$ .
- (b) Per quali valori di  $\alpha$  il duale ha regione ammissibile vuota, per quali ha ottimo finito?

47. Dire per quali valori di  $c_1$  e  $c_2$  il problema

$$\begin{cases} \min & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

ha soluzioni ottime non degeneri e per quali ne ha degeneri. Al variare di  $c$  determinare quelli che hanno il minimo uguale ad 1.

48. Studiare la funzione

$$f(\alpha) = \begin{cases} \min & x_1 + x_2 \\ & \alpha x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

#### 4. ESERCIZI DI PL

49. Risolvere, con l'algoritmo del simplesso, il problema

$$\begin{cases} \min & -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

50. È dato il seguente problema:

$$\begin{cases} \min & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Sia (\*) il problema che si ottiene ponendo  $x_1 = x_1^+ - x_1^-$  con  $x_1^+, x_1^- \geq 0$ . Dimostrare che se (\*) ha soluzioni ottime, ha anche una soluzione ottima che soddisfa  $x_1^+ x_1^- = 0$ .

51. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min & (c + \vartheta e)^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

dove  $e$  è il vettore di  $\mathbb{R}^n$  con tutte le componenti uguali ad 1. Dimostrare che:

- (a) se per  $\vartheta = \vartheta_1$  e  $\vartheta = \vartheta_2$  esistono soluzioni per il problema dato, così è per ogni  $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$ ;
- (b) se per  $\vartheta = \vartheta_0$  la funzione obiettivo non è inferiormente limitata su

$$\{Ax = b, \quad x \geq 0\},$$

essa non è inferiormente limitata per ogni  $\vartheta \geq \vartheta_0$  oppure per ogni  $\vartheta \leq \vartheta_0$ .

52. Risolvere, con l'algoritmo del simplesso, il problema

$$\begin{cases} \min & -3x_1 - 2x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

53. Studiare la funzione  $F(a) = \begin{cases} \min & x_2 \\ & x_2 \geq -1 \\ & x_1 \leq 0 \\ & ax_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}, \text{ con } a \geq 0.$

# Parte II

## Programmazione Lineare su reti





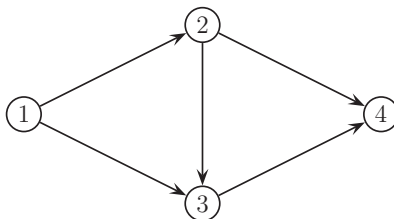
# Capitolo 5

## Problemi e modelli di PL su reti

Una classe interessante di problemi di PL trova una sua modellizzazione tramite il concetto di grafo. Un grafo  $G = (N, A)$  è definito da un insieme di nodi  $N$  e da un insieme di archi  $A \subseteq N \times N$ . Ad esempio, il grafo  $(N, A)$  con

$$N = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

è rappresentato nella seguente figura:



### 5.1 Flusso di costo minimo

Supponiamo che su ogni arco  $(i, j)$  siano definiti un costo  $c_{ij}$  per unità di flusso, una capacità inferiore  $\ell_{ij}$  ed una superiore  $u_{ij}$  del flusso e sui nodi siano assegnati dei bilanci  $b_i$  con la convenzione che  $b_i > 0$  significa che il nodo  $i$  è un pozzo (destinazione) e che  $b_i < 0$  significa che il nodo  $i$  è una sorgente (origine). Introduciamo le variabili  $x_{ij}$  ognuna delle quali rappresenta il flusso sull'arco  $(i, j)$ . Si vuole determinare il flusso di costo minimo che rispetti i bilanci dei nodi e le capacità degli archi.

Il problema si può formulare nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum_{(p,i) \in A} x_{pi} - \sum_{(i,q) \in A} x_{iq} = b_i \quad \forall i \in N & \text{(vincoli di bilancio)} \\ \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A & \text{(vincoli di capacità)} \end{array} \right.$$

oppure in forma compatta come:

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & E x = b \\ & \ell \leq x \leq u \end{cases}$$

dove la matrice  $E$ , di dimensioni  $|N| \times |A|$ , è la matrice di incidenza del grafo in cui l'elemento di riga  $p \in N$  e colonna  $(i, j) \in A$  è:

$$E_{p,(i,j)} = \begin{cases} -1 & \text{se } p = i, \\ 1 & \text{se } p = j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

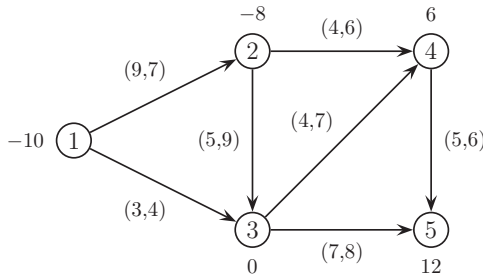
Supporremo sempre che il vettore  $x$  dei flussi sia ordinato nel cosiddetto ordine lessicografico:

$$\begin{array}{ll} x_{i,j} & \text{viene prima di } x_{r,s} \\ \text{se } i < r & \text{oppure se } i = r \text{ e } j < s. \end{array}$$

Senza ledere la generalità della trattazione possiamo supporre che  $\ell_{ij} = 0$  per ogni arco  $(i, j)$  (eventualmente si opera il cambio di variabile  $x' = x - \ell$ ) e che valga la condizione  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ . Infatti, se  $\sum_{i \in N} b_i \neq 0$  si può aggiungere al grafo un nodo fittizio  $n+1$  con bilancio  $b_{n+1} = -\sum_{i \in N} b_i$ . Se  $b_{n+1} < 0$ , si aggiungono archi (di costo nullo e capacità  $+\infty$ ) che vanno dal nodo fittizio verso ogni pozzo, mentre se  $b_{n+1} > 0$  si aggiungono archi (sempre di costo nullo e capacità  $+\infty$ ) che vanno dalle sorgenti al nodo fittizio.

Esistono altre formulazioni equivalenti a cui ogni problema di flusso di costo minimo generico può essere ricondotto. Ricordiamo, ad esempio, il problema singolo pozzo-singola sorgente (tutti gli altri nodi con bilancio nullo) e il problema di circolazione (tutti i nodi a bilancio nullo).

**Esempio 5.1.1.** Consideriamo il problema di flusso di costo minimo sul seguente grafo in cui ci sono due sorgenti (i nodi 1 e 2), due pozzi (i nodi 4 e 5) ed un nodo a bilancio nullo (il nodo 3). Sugli archi sono indicati, in ordine, il costo e le capacità superiori:



## 5.1 FLUSSO DI COSTO MINIMO

Il problema può essere formulato come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad 9x_{12} + 3x_{13} + 5x_{23} + 4x_{24} + 4x_{34} + 7x_{35} + 5x_{45} \\ -x_{12} - x_{13} = -10 \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = -8 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} = 6 \\ x_{35} + x_{45} = 12 \\ 0 \leq x_{12} \leq 7 \\ 0 \leq x_{13} \leq 4 \\ 0 \leq x_{23} \leq 9 \\ 0 \leq x_{24} \leq 6 \\ 0 \leq x_{34} \leq 7 \\ 0 \leq x_{35} \leq 8 \\ 0 \leq x_{45} \leq 6 \end{array} \right.$$

oppure in forma compatta come

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad c^T x \\ E x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{array} \right.$$

dove il vettore dei flussi, in ordine lessicografico, è

$$x = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45})^T,$$

il vettore dei costi è

$$c = (9, 3, 5, 4, 4, 7, 5)^T,$$

il vettore dei bilanci è

$$b = (-10, -8, 0, 6, 12)^T,$$

il vettore delle capacità è

$$u = (7, 4, 9, 6, 7, 8, 6)^T,$$

e la matrice di incidenza è

$$E = \begin{array}{c|ccccccc} & (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (3,4) & (3,5) & (4,5) \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

□

## 5.2 Trasporto

Supponiamo di avere  $m$  luoghi di produzione collegati con  $n$  luoghi di raccolta. Per fissare le idee si può pensare alla distribuzione giornaliera su un territorio di un prodotto come ad esempio un carburante. Supponiamo che siano note le capacità produttive  $o_i$ , per  $i = 1, \dots, m$ , (giornaliera, settimanale, mensile), le domande  $d_j$ , per  $j = 1, \dots, n$ , ed il costo di trasporto da ogni luogo di produzione ad ogni luogo di destinazione. Supponiamo che il costo di spedizione sia proporzionale (lineare), cosicché possiamo supporre che esista il costo unitario  $c_{ij}$  del trasporto da  $i$  a  $j$ . Si voglia determinare un piano di trasporto compatibile con la produzione e con la richiesta e che minimizzi il costo totale di trasporto.

Indichiamo con  $x_{ij}$  la quantità di merce da trasportare da  $i$  a  $j$  e formuliamo il modello tenendo conto che, fissato  $j$ , sommando su  $i$  le  $x_{ij}$  si ottiene la quantità di merce che arriva al luogo di raccolta  $j$  e viceversa, fissato  $i$ , sommando su  $j$  le  $x_{ij}$  si ottiene la quantità di merce spedita dal luogo di produzione  $i$ . Il modello matematico è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq o_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Naturalmente il problema non ha soluzioni ammissibili se la domanda totale supera l'offerta totale, cioè

$$\sum_{j=1}^n d_j > \sum_{i=1}^m o_i.$$

Nel caso in cui ci sia invece un eccesso di produzione, cioè

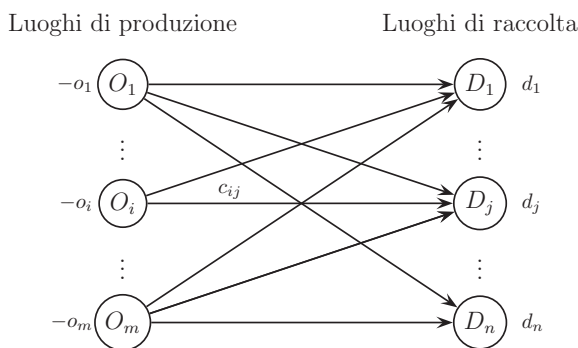
$$\sum_{j=1}^n d_j < \sum_{i=1}^m o_i,$$

si può pensare di aggiungere un luogo di raccolta fittizio a cui spedire (a costo nullo) l'eccesso di produzione. Perciò, quando la domanda non supera l'offerta, a meno di aggiungere un nodo fittizio di raccolta, possiamo supporre che nel modello precedente i vincoli di produzione e di domanda siano tutti vincoli di uguaglianza, cioè:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = o_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.2)$$

## 5.2 TRASPORTO

È anche evidente che il modello è compatibile con il trasporto di merce che sia divisibile (tipo carburante), in quanto la soluzione del modello matematico potrebbe, a priori, non essere a componenti intere anche in presenza dei vettori  $(o_1, \dots, o_m)$  e  $(d_1, \dots, d_n)$  tutti a componenti intere. Se il bene da trasportare fosse indivisibile (tipo elettrodomestici, mobili, etc.) bisognerebbe aggiungere nel problema (5.2) il vincolo  $x_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Osserviamo che il problema del trasporto può essere formulato come un problema di flusso di costo minimo su un grafo avente i nodi  $O_1, \dots, O_m$ , con bilancio  $-o_1, \dots, -o_m$ , corrispondenti ai luoghi di produzione, i nodi  $D_1, \dots, D_n$ , con bilancio  $d_1, \dots, d_n$ , corrispondenti ai luoghi di raccolta e gli archi che collegano ogni luogo di produzione  $i$  con ogni luogo di raccolta  $j$  con costo  $c_{ij}$  e capacità superiore  $+\infty$ . Un grafo di questo tipo è detto bipartito, perché l'insieme dei nodi  $N$  è partizionato in due sottoinsiemi  $\{O_1, \dots, O_m\}$  e  $\{D_1, \dots, D_n\}$  ed ogni arco collega un nodo  $O_i$  con un nodo  $D_j$ .



Alcune varianti al problema potrebbero condurre a modelli matematici sostanzialmente diversi. Le principali di esse sono:

- domanda e disponibilità potrebbero non essere note “a priori” ma solo con una certa distribuzione di probabilità;
- il costo potrebbe non essere lineare ma costante a tratti oppure con un cosiddetto “costo fisso iniziale” di trasporto oppure addirittura completamente non lineare;
- le connessioni con i luoghi di domanda potrebbero non essere tutte presenti.

**Esempio 5.2.1.** Un'azienda elettrica possiede tre centrali che devono soddisfare le esigenze di 4 città. Ogni centrale può fornire il seguente numero di kilowatt-ora (kwh) di elettricità: 35 milioni lo stabilimento 1, 50 milioni lo stabilimento 2 e 40 milioni lo stabilimento 3. Il picco di domanda delle città che avviene verso le 2 del pomeriggio è di 45 milioni per la città 1, 20 milioni per la città 2, di 30 milioni per la città 3 e di 30 milioni per la città 4. Il costo (in milioni di euro) per mandare 1 milione di kwh dipende dalla distanza che l'elettricità deve percorrere ed è indicato nella tabella seguente:

## 5. PROBLEMI E MODELLI DI PL SU RETI

|            | città 1 | città 2 | città 3 | città 4 |
|------------|---------|---------|---------|---------|
| centrale 1 | 8       | 6       | 10      | 9       |
| centrale 2 | 9       | 12      | 13      | 7       |
| centrale 3 | 14      | 9       | 16      | 5       |

Indichiamo con  $x_{ij}$  il numero di kwh (in milioni) prodotto dallo stabilimento  $i$  per la città  $j$ . La formulazione del problema è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + \\ \quad + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

□

### 5.3 Cammini minimi

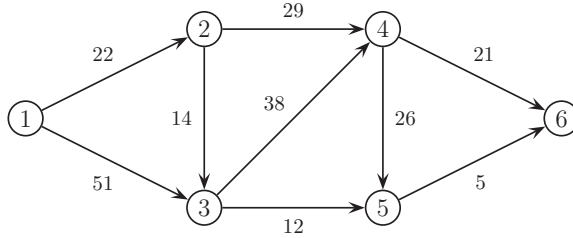
Molto spesso è necessario trovare su un grafo, in cui sono noti i costi degli archi, un cammino di costo minimo da un nodo di partenza ad un nodo di arrivo. Sono i problemi di indirizzamento ottimale in una rete di calcolatori, di percorso di costo minimo da un aeroporto ad un altro, e così via.

Diamo la definizione di cammino. Un cammino dal nodo  $n_1$  al nodo  $n_{p+1}$  è un insieme di archi  $a_1, \dots, a_p$  tale che per ogni  $i = 1, \dots, p$  si ha che  $a_i = (n_i, n_{i+1})$  oppure  $a_i = (n_{i+1}, n_i)$  ed inoltre che gli archi siano tutti diversi tra loro. Se tutti gli archi coinvolti vanno dal nodo  $n_i$  al nodo  $n_{i+1}$  il cammino si dice orientato. Un cammino da  $n_1$  a  $n_{p+1}$  si dice un ciclo se  $n_1 = n_{p+1}$ , ossia se il nodo di partenza coincide con il nodo di arrivo.

Consideriamo il problema di trovare (se esistono) i cammini orientati di costo minimo da un nodo  $r$  (detto radice) verso tutti gli altri nodi. Tale problema si può formulare come un problema di flusso di costo minimo ponendo le capacità superiori  $u_{ij} = +\infty$ , il bilancio del nodo radice uguale a  $-(n-1)$  ed i bilanci degli altri nodi uguali a 1. Ciò equivale a supporre che  $n-1$  unità di flusso si debbano dirigere dal nodo  $r$  ognuna verso un nodo diverso dagli altri (bilanci 1 ai nodi) al costo minimo.

**Esempio 5.3.1.** Supponiamo di voler cercare i cammini minimi dal nodo 1 a tutti gli altri nodi nel seguente grafo in cui sono indicati i costi degli archi:

## 5.4 FLUSSO MASSIMO



Tale problema può essere formulato come un problema flusso di costo minimo, con il bilancio del nodo 1 uguale a  $-5$  ed i bilanci degli altri nodi uguali a 1, ossia come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad 22x_{12} + 51x_{13} + 14x_{23} + 29x_{24} + 38x_{34} + 12x_{35} + 26x_{45} + 21x_{46} + 5x_{56} \\ -x_{12} - x_{13} = -5 \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 1 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 1 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 1 \\ x_{35} + x_{45} - x_{56} = 1 \\ x_{46} + x_{56} = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

□

Un altro problema importante e con molte applicazioni è il cosiddetto problema di minima connessione: bisogna trovare un sottoinsieme  $T$  di archi che connette tutti i nodi del grafo, cioè per ogni coppia di nodi  $i$  e  $j$  deve esistere un cammino (non necessariamente orientato) da  $i$  a  $j$  formato da archi di  $T$ , in modo che il costo totale sia minimo.

## 5.4 Flusso massimo

Supponiamo di dover spedire da un nodo origine  $s$  ad un nodo destinazione  $t$  il massimo flusso possibile compatibilmente con le capacità superiori definite sugli archi. Supponiamo che il grafo sia orientato, con capacità superiori intere, contenente almeno un cammino orientato da  $s$  a  $t$ . Tutte le considerazioni che faremo in questo paragrafo possono essere facilmente estese al caso in cui qualche arco abbia capacità superiore  $+\infty$ . È ovvio che se ci fosse un cammino orientato da  $s$  a  $t$  formato da archi tutti con capacità superiori uguali a  $+\infty$ , allora il problema sarebbe illimitato superiormente. D'altra parte, se non ci fosse alcun cammino orientato da  $s$  a  $t$  l'unico flusso ammissibile sarebbe quello nullo.

Osserviamo, preliminarmente, che la risoluzione di un problema di flusso massimo può essere usata per determinare un flusso ammissibile in un problema di flusso di costo minimo. Infatti, aggiungiamo un nodo  $s$  collegato con i nodi sorgenti  $j$  (cioè  $b_j < 0$ ) con archi  $(s, j)$  di capacità  $-b_j$  ed un nodo  $t$  collegato con i pozzi  $i$  (cioè  $b_i > 0$ ) con archi  $(i, t)$  di capacità

## 5. PROBLEMI E MODELLI DI PL SU RETI

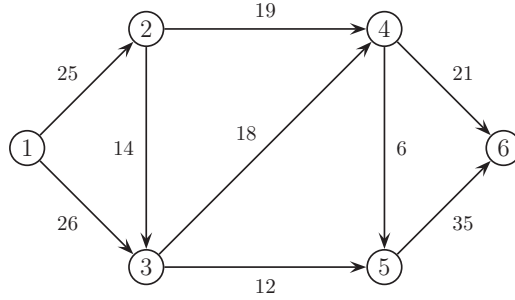
$b_i$ , e risolviamo il problema di flusso massimo da  $s$  a  $t$ . Se il flusso massimo satura (cioè coincide con le capacità superiori) tutti gli archi aggiunti, allora tale flusso è ammissibile per il problema di flusso di costo minimo, altrimenti non esistono flussi ammissibili per il problema di flusso di costo minimo.

Il problema di flusso massimo può essere formulato così:

$$\begin{cases} \max v \\ Ex = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases} \quad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \neq s, t \\ v & \text{se } i = t \end{cases}$$

dove la variabile  $v$  rappresenta il flusso totale spedito da  $s$  a  $t$ .

**Esempio 5.4.1.** Vogliamo spedire il massimo flusso possibile dal nodo 1 al nodo 6 rispettando le capacità superiori degli archi indicate in figura:



Il problema può essere formulato nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max v \\ -x_{12} - x_{13} = -v \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0 \\ x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0 \\ x_{46} + x_{56} = v \\ 0 \leq x_{12} \leq 25 \\ 0 \leq x_{13} \leq 26 \\ 0 \leq x_{23} \leq 14 \\ 0 \leq x_{24} \leq 19 \\ 0 \leq x_{34} \leq 18 \\ 0 \leq x_{35} \leq 12 \\ 0 \leq x_{45} \leq 6 \\ 0 \leq x_{46} \leq 21 \\ 0 \leq x_{56} \leq 35 \end{array} \right.$$

□



## 5.5 Assegnamento di costo minimo

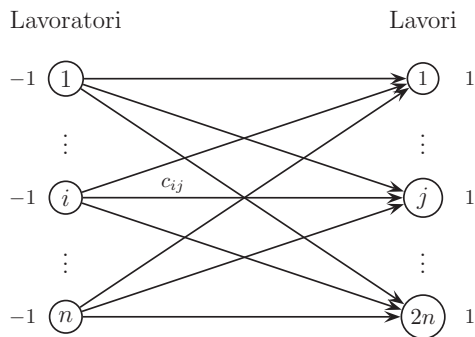
Supponiamo di dover eseguire  $n$  lavori avendo a disposizione  $n$  lavoratori, ciascuno dei quali sappia fare tutti i lavori. Conosciamo inoltre la tabella dei costi  $c_{ij}$  per far svolgere il lavoro  $j$  al lavoratore  $i$ . Dobbiamo assegnare ad ogni lavoratore un solo lavoro e minimizzare il costo totale. Introduciamo le variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoratore } i \text{ svolge il lavoro } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il problema di assegnamento si può formulare come:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 & \text{per ogni lavoro } j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & \text{per ogni lavoratore } i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Tale problema equivale al seguente problema di flusso di costo minimo dove gli archi, che sono  $n^2$ , connettono ogni lavoratore ad ogni lavoro con costo  $c_{ij}$ :



**Esempio 5.5.1.** Consideriamo il problema di assegnare a costo minimo 8 lavori a 8 lavoratori, sapendo che la tabella dei costi è la seguente:

| lavoratori | lavori |    |    |    |    |    |    |    |
|------------|--------|----|----|----|----|----|----|----|
|            | 1      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 1          | 26     | 22 | 38 | 29 | 18 | 9  | 27 | 12 |
| 2          | 13     | 14 | 20 | 5  | 42 | 23 | 18 | 34 |
| 3          | 11     | 28 | 35 | 4  | 39 | 30 | 22 | 7  |
| 4          | 13     | 21 | 6  | 35 | 23 | 21 | 31 | 30 |
| 5          | 21     | 17 | 39 | 7  | 16 | 25 | 32 | 38 |
| 6          | 29     | 27 | 10 | 11 | 20 | 8  | 24 | 39 |
| 7          | 12     | 24 | 10 | 26 | 13 | 15 | 22 | 31 |
| 8          | 33     | 31 | 35 | 11 | 17 | 31 | 16 | 17 |

□

## 5.6 Addestramento di costo minimo

Supponiamo che un'azienda debba addestrare i suoi  $m$  impiegati a compiere un certo numero  $n$  di mansioni, che ogni mansione  $j$  debba essere imparata, per essere poi svolta, da un numero  $b_j$  di impiegati, che ogni impiegato debba imparare e svolgere una ed una sola mansione, e che il costo sopportato dall'azienda per addestrare l'impiegato  $i$  a svolgere la mansione  $j$  sia dato e pari a  $c_{ij}$ . Si voglia determinare il piano di addestramento di costo minimo. Introduciamo le variabili binarie:

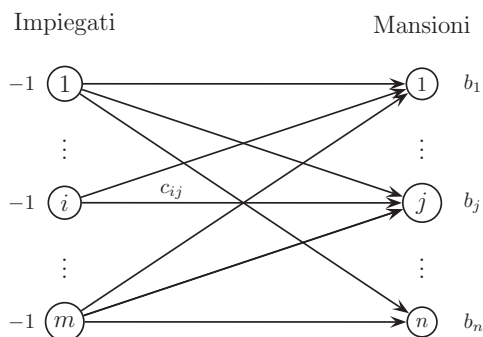
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'impiegato } i \text{ è addestrato a svolgere la mansione } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il problema può essere formulato come:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{per ogni mansione } j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni impiegato } i = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Il problema può essere trasformato in un problema di flusso di costo minimo su un grafo bipartito ottenuto orientando gli archi dagli impiegati  $1, \dots, m$  verso le mansioni  $1, \dots, n$  e ponendo bilanci uguali a  $-1$  sui nodi corrispondenti agli impiegati e bilancio uguale a  $b_j$  per ogni mansione  $j$ . Osserviamo che tale problema è un caso particolare del problema del trasporto, con i bilanci dei nodi  $1, \dots, m$  sono tutti uguali a  $-1$ .

## 5.6 ADDESTRAMENTO DI COSTO MINIMO



**Esempio 5.6.1.** Supponiamo di dover addestrare 9 impiegati a compiere 3 mansioni che devono essere svolte, rispettivamente, da 4, 3 e 2 impiegati. I costi di addestramento sono:

| mansioni | impiegati |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----------|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|
|          | 1         | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 1        | 27        | 47 | 37 | 18 | 43 | 35 | 15 | 18 | 34 |
| 2        | 35        | 24 | 33 | 28 | 11 | 11 | 22 | 10 | 25 |
| 3        | 37        | 13 | 11 | 34 | 34 | 10 | 10 | 17 | 33 |

La formulazione del problema è la seguente:

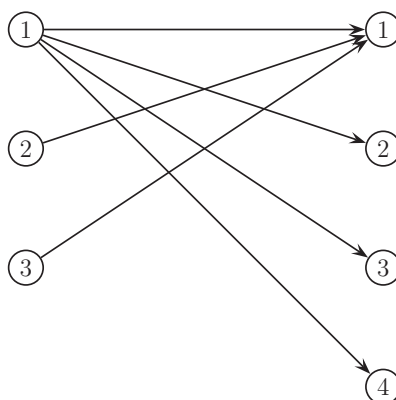
$$\left\{ \begin{array}{l}
 \min \quad 27x_{11} + 35x_{12} + 37x_{13} + 47x_{21} + 24x_{22} + 13x_{23} + 37x_{31} + 33x_{32} + 11x_{33} \\
 \quad + 18x_{41} + 28x_{42} + 34x_{43} + 43x_{51} + 11x_{52} + 34x_{53} + 35x_{61} + 11x_{62} + 10x_{63} \\
 \quad + 15x_{71} + 22x_{72} + 10x_{73} + 18x_{81} + 10x_{82} + 17x_{83} + 34x_{91} + 25x_{92} + 33x_{93} \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} + x_{91} = 4 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} + x_{82} + x_{92} = 3 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} + x_{83} + x_{93} = 2 \\
 x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\
 x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1 \\
 x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1 \\
 x_{71} + x_{72} + x_{73} = 1 \\
 x_{81} + x_{82} + x_{83} = 1 \\
 x_{91} + x_{92} + x_{93} = 1 \\
 x_{ij} \in \{0, 1\}
 \end{array} \right.$$

□

## 5.7 Accoppiamento di cardinalità massima

Supponiamo di avere  $m$  lavoratori e  $n$  lavori da svolgere. Sapendo che ogni lavoratore sappia svolgere alcuni dei lavori e che ad ogni lavoratore si possa assegnare al massimo un lavoro consideriamo il problema di dover assegnare i lavori ai lavoratori in modo da eseguire il massimo numero di lavori. Tale problema può essere trasformato in un problema di flusso massimo in un grafo che contiene i nodi  $1, \dots, m$  che rappresentano i lavoratori, i nodi  $1, \dots, n$  che rappresentano i lavori e due nodi fittizi  $s$  e  $t$  (origine e destinazione). Gli archi collegano ogni lavoratore a tutti i lavori che sa svolgere, il nodo  $s$  a tutti i lavoratori e tutti i lavori al nodo  $t$ , ponendo tutti gli archi con capacità superiore uguale a 1.

**Esempio 5.7.1.** Supponiamo di avere 3 lavoratori e 4 lavori. Gli archi in figura rappresentano la capacità del lavoratore  $i$  di saper svolgere il lavoro  $j$ :



In tal caso si osserva che l'accoppiamento ottimo (non unico) ha cardinalità 2. Infatti un accoppiamento di cardinalità 3 non è possibile trovarlo.  $\square$

# Capitolo 6

## Flusso di costo minimo

In questo capitolo analizziamo la struttura matematica dei problemi di flusso di costo minimo descritti nel paragrafo 5.1. Consideriamo un grafo  $G = (N, A)$  e supponiamo che sugli archi siano definiti un costo  $c_{ij}$  per unità di flusso ed una capacità superiore del flusso  $u_{ij}$ . Sui nodi siano assegnati dei bilanci  $b_i$  tali che la loro somma sia nulla. Il problema del flusso di costo minimo consiste nel determinare un flusso che rispetti i bilanci dei nodi e le capacità degli archi e che abbia costo totale minimo. Tale problema si può formulare nel modo seguente:

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ex = b \\ & 0 \leq x \leq u \end{cases} \quad (6.1)$$

dove  $x$  è il vettore dei flussi sugli archi ed  $E$  è la matrice di incidenza.

Il poliedro  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ex = b, \quad 0 \leq x \leq u\}$  viene chiamato poliedro dei flussi.

### 6.1 Proprietà della matrice di incidenza

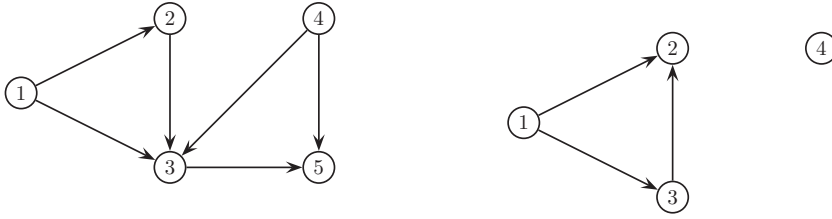
In questo paragrafo introduciamo i concetti di grafo connesso e di albero di copertura che saranno utili nello studio del problema (6.1).

**Definizione 6.1.1.** (Grafo connesso)

Un grafo si dice connesso se per ogni coppia di nodi del grafo esiste un cammino (non necessariamente orientato) che li connette.

Nella figura seguente c'è un esempio di grafo connesso (a sinistra) e di uno non connesso (a destra).

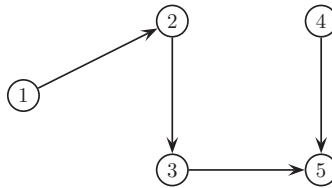
## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO



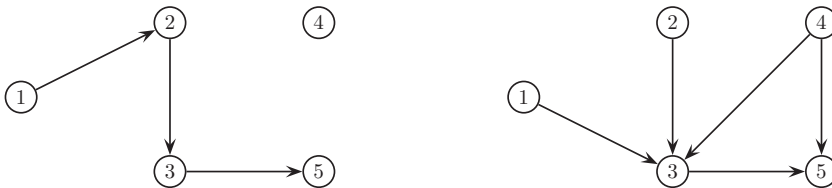
### Definizione 6.1.2. (Albero di copertura)

Nel grafo  $(N, A)$  un albero di copertura è un sottoinsieme di archi  $T \subseteq A$  tale che il sottografo  $(N, T)$  sia connesso e non contenga cicli (non necessariamente orientati). Una foglia di  $T$  è un nodo sul quale incide un solo arco di  $T$ .

Ad esempio, nel grafo a sinistra della figura precedente l'insieme  $\{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\}$  è un albero di copertura le cui foglie sono i nodi 1 e 4:



L'insieme  $\{(1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$  non è un albero di copertura perché non connette tutti i nodi e neanche l'insieme  $\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\}$  è un albero di copertura perché contiene un ciclo (non orientato) sui nodi 3, 4 e 5:



### Proposizione 6.1.1.

1. Un grafo è connesso se e solo se contiene almeno un albero di copertura.
2. In un grafo connesso con  $n$  nodi, ogni albero di copertura contiene esattamente  $n - 1$  archi ed almeno 2 foglie.

D'ora in poi supponiamo che il grafo  $(N, A)$ , con  $n$  nodi e  $m$  archi, sia connesso. La matrice di incidenza  $E$  del grafo ha le seguenti proprietà.

## 6.1 PROPRIETÀ DELLA MATRICE DI INCIDENZA

**Proposizione 6.1.2.** *Il rango di  $E$  è minore o uguale a  $n - 1$  ed il sistema  $E x = b$  è sovradeterminato.*

**Dimostrazione.** La somma delle righe della matrice  $E$  è uguale al vettore nullo perché ogni colonna di  $E$  contiene un 1, un  $-1$  e tutti zeri. Quindi le  $n$  righe di  $E$  non sono linearmente indipendenti e di conseguenza  $E$  ha rango al più uguale a  $n - 1$ .

Inoltre abbiamo supposto che il grafo sia bilanciato, ossia che  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ . Quindi nel sistema  $E x = b$  si può cancellare un'equazione senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema, ossia il sistema è sovradeterminato.  $\square$

Da qui in avanti, per indicare la matrice di incidenza useremo per comodità la lettera  $E$  intendendo sempre di aver cancellato la riga relativa al nodo 1.

**Proposizione 6.1.3.** *Se  $T$  è un albero di copertura, allora la sottomatrice quadrata  $E_T$ , di dimensione  $(n - 1)$ , ottenuta scegliendo le colonne relative agli archi di  $T$ , è invertibile e  $\det(E_T) = \pm 1$ .*

**Dimostrazione.** Dimostriamo che, permutando opportunamente le righe e le colonne, la matrice  $E_T$  è triangolare inferiore con elementi sulla diagonale uguali a 1 oppure a  $-1$ . Procediamo per induzione sul numero dei nodi del grafo. Scegliamo una foglia  $z$  di  $T$  e indichiamo con  $a$  l'unico arco di  $T$  che incide su  $z$ . Permutando le righe e le colonne di  $E_T$  in modo che la prima riga corrisponda al nodo  $z$  e la prima colonna all'arco  $a$ , otteniamo che

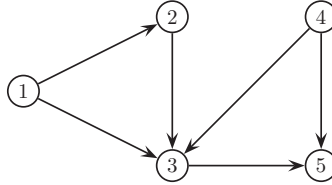
$$E_T = \left( \begin{array}{c|ccc} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & & E_S & \end{array} \right)$$

dove  $E_S$  è la matrice di incidenza relativa all'albero di copertura  $S = T \setminus \{a\}$  nel sottografo con  $n - 1$  nodi ottenuto da  $(N, A)$  cancellando il nodo  $z$ . Per ipotesi induttiva la matrice  $E_S$  è triangolare inferiore con 1 o  $-1$  sulla diagonale, quindi l'intera matrice  $E_T$  è triangolare inferiore con 1 o  $-1$  sulla diagonale e quindi è invertibile con determinante uguale a  $\pm 1$ .  $\square$

**Corollario 6.1.1.** *Il rango di  $E$  è uguale a  $n - 1$ .*

Per scrivere in forma triangolare inferiore la matrice di incidenza  $E_T$  di un albero di copertura  $T$  bisogna effettuare un'opportuna visita di  $T$ , detta *visita per foglie* (che abbiamo usato nella dimostrazione della Proposizione 6.1.3). Partiamo scegliendo una foglia  $z$  (diversa dal nodo 1) di  $T$  e consideriamo l'unico arco  $a$  di  $T$  che incide sul nodo  $z$ . Costruiamo la matrice  $E_T$  mettendo il nodo  $z$  come prima riga e l'arco  $a$  come prima colonna. Cancelliamo dal grafo  $(N, T)$  il nodo  $z$  e l'arco  $a$ . Nel grafo rimasto scegliamo ancora una foglia  $w$  (diversa dal nodo 1) e consideriamo l'unico arco  $a'$  che incide sul nodo  $w$ . Poniamo il nodo  $w$  come seconda riga di  $E_T$  e l'arco  $a'$  come seconda colonna. Iterando questo procedimento si ottiene la matrice  $E_T$  in forma triangolare inferiore.

**Esempio 6.1.1.** Consideriamo il seguente grafo connesso:



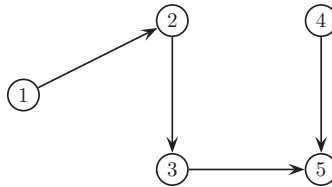
La sua matrice di incidenza, senza la riga 1, è la seguente:

|   | (1,2) | (1,3) | (2,3) | (3,5) | (4,3) | (4,5) |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 1     | 0     | -1    | 0     | 0     | 0     |
| 3 | 0     | 1     | 1     | -1    | 1     | 0     |
| 4 | 0     | 0     | 0     | 0     | -1    | -1    |
| 5 | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     |

Abbiamo già detto che l'insieme di archi

$$T = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,5)\}$$

forma un albero di copertura, infatti il grafo



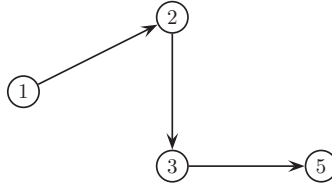
è connesso e non contiene cicli. Dimostriamo che la sottomatrice  $E_T$  è invertibile, scrivendola in forma triangolare inferiore con una visita per foglie. Partiamo con una foglia di  $T$ : l'unica foglia diversa dal nodo 1 (che abbiamo eliminato da  $E$ ) è il nodo 4. Scegliamo l'unico arco di  $T$  che incide sul nodo 4, cioè l'arco  $(4,5)$ . Costruiamo  $E_T$  mettendo il nodo 4 come prima riga e l'arco  $(4,5)$  come prima colonna:

$$E_T = \begin{array}{c|cccc} & (4,5) & & & \\ \hline 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \end{array}$$

Cancellando dal grafo  $(N, T)$  il nodo 4 e l'arco  $(4,5)$  otteniamo il sottografo



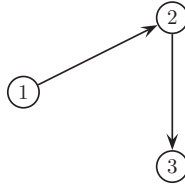
## 6.1 PROPRIETÀ DELLA MATRICE DI INCIDENZA



e applichiamo a quest'ultimo grafo la stessa regola di visita: scegliamo una foglia diversa dal nodo 1, cioè il nodo 5, e troviamo l'unico arco (in questo sottografo) che incide sul nodo 5, cioè l'arco (3,5). Mettiamo il nodo 5 come seconda riga di  $E_T$  e l'arco (3,5) come seconda colonna ottenendo:

$$E_T = \begin{array}{c|ccc} & (4,5) & (3,5) & & \\ \hline 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Cancellando il nodo 5 e l'arco (3,5) otteniamo il sottografo



Scegliamo la foglia 3 e l'arco (2,3) che saranno rispettivamente la terza riga e la terza colonna di  $E_T$ :

$$E_T = \begin{array}{c|ccc} & (4,5) & (3,5) & (2,3) & \\ \hline 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Infine rimangono il nodo 2 e l'arco (1,2) che sono rispettivamente la quarta riga e la quarta colonna di  $E_T$ :

$$E_T = \begin{array}{c|cccc} & (4,5) & (3,5) & (2,3) & (1,2) \\ \hline 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Abbiamo così scritto la matrice  $E_T$  in forma triangolare inferiore con elementi diagonali  $\pm 1$ , quindi  $E_T$  è invertibile con determinante uguale a  $-1$ .  $\square$

Dimostriamo che vale anche il viceversa della Proposizione 6.1.3.

**Proposizione 6.1.4.** *Se  $E_T$  è una sottomatrice invertibile di  $E$ , di dimensione  $(n - 1)$ , allora  $T$  è un albero di copertura.*

**Dimostrazione.** Supponiamo, per assurdo, che  $T$  non sia un albero di copertura. Allora  $T$  contiene un ciclo. Moltiplichiamo per 1 o  $-1$  le colonne di  $E_T$  in modo che il ciclo diventi orientato (il determinante di  $E_T$  cambia eventualmente solo il segno). Allora la somma delle colonne del ciclo è uguale al vettore nullo e quindi il determinante di  $E_T$  è uguale 0, ma questo contraddice l'ipotesi che  $E_T$  sia invertibile.  $\square$

## 6.2 Flusso di costo minimo non capacitato

In questo paragrafo consideriamo il caso particolare del problema di flusso di costo minimo in cui le capacità superiori sugli archi sono illimitate, ovvero  $u_{ij} = +\infty$ . In questo caso il problema si può formulare semplicemente come:

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & E x = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

che è già in forma duale standard. Per le Proposizioni 6.1.3 e 6.1.4 le basi coincidono con gli alberi di copertura del grafo, ossia:

$$B \text{ è una base} \quad \Longleftrightarrow \quad B \text{ è un albero di copertura}$$

Quindi per trovare una base è sufficiente fare una partizione degli archi in due sottoinsiemi  $(T, L)$ , dove  $T$  è un albero di copertura. Il relativo flusso di base  $\bar{x}$  è dato da

$$\bar{x}_T = E_T^{-1} b, \quad \bar{x}_L = 0.$$

Tale flusso è ammissibile se e solo se  $\bar{x}_T \geq 0$  ed è degenere se e solo se esiste un arco  $(i, j) \in T$  tale che  $\bar{x}_{ij} = 0$ .

**Teorema 6.2.1.** (Dell'interrezza)

*Se il vettore  $b$  è a componenti intere, allora i flussi di base sono a componenti intere.*

**Dimostrazione.** Segue dal fatto che le matrici di base hanno il determinante uguale a  $\pm 1$ .  $\square$

Grazie al Teorema 6.2.1, in un flusso di costo minimo non capacitato si può sempre eliminare l'eventuale vincolo  $x \in \mathbb{Z}^n$  ed ottenere un problema equivalente di PL.

Il duale del problema (6.2) è il seguente:

$$\begin{cases} \max & \pi^T b \\ & \pi^T E \leq c^T \end{cases}$$

## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO

ed è chiamato problema dei potenziali ai nodi della rete. Il potenziale di base relativo alla base  $T$  è la soluzione del sistema  $\pi^T E_T = c_T^T$ . Tale sistema è di facile risoluzione perché  $E_T$  è triangolare inferiore. Inoltre si pone  $\pi_1 = 0$  in quanto il sistema è sottodeterminato, cioè ha  $n - 1$  equazioni e  $n$  incognite. Perciò il potenziale di base è

$$\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1},$$

che è ammissibile se e solo se  $\bar{\pi}^T E_L \leq c_L$ . Se definiamo il costo ridotto dell'arco  $(i, j)$  relativo al potenziale  $\bar{\pi}$  come

$$c_{ij}^{\bar{\pi}} = c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j, \quad (\text{costo ridotto})$$

allora il potenziale di base è ammissibile se i costi ridotti degli archi di  $L$  non sono negativi:

$$c_{ij}^{\bar{\pi}} = c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j \geq 0 \quad \forall (i, j) \in L.$$

Il potenziale di base è degenere se e solo se esiste un arco  $(i, j) \in L$  con  $c_{ij}^{\bar{\pi}} = 0$ .

Riassumiamo nella tabella i possibili casi per i flussi ed i potenziali di base:

|                 | flusso di base<br>$\bar{x}_T = E_T^{-1}b \quad \bar{x}_L = 0$ | potenziale di base<br>$\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}$     |
|-----------------|---|--|
| ammissibile     | $\forall (i, j) \in T$ si ha $\bar{x}_{ij} \geq 0$            | $\forall (i, j) \in L$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0$ |
| non ammissibile | $\exists (i, j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} < 0$            | $\exists (i, j) \in L$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0$ |
| degenere        | $\exists (i, j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = 0$            | $\exists (i, j) \in L$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} = 0$ |
| non degenere    | $\forall (i, j) \in T$ si ha $\bar{x}_{ij} \neq 0$            | $\forall (i, j) \in L$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \neq 0$ |

Applicando il Teorema 2.4.1 alla coppia di problemi duali flusso/potenziali otteniamo la seguente condizione sufficiente di ottimalità per flussi di base.

**Teorema 6.2.2.** (Bellman)

*Supponiamo che una partizione  $(T, L)$  degli archi generi un flusso di base  $\bar{x}$  ammissibile. Se il potenziale di base  $\bar{\pi}$  è tale che*

$$c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 \quad \text{per ogni } (i, j) \in L, \quad (\text{condizioni di Bellman})$$

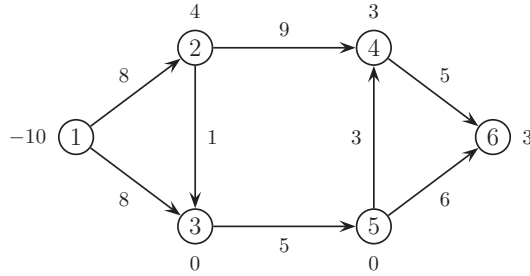
*allora  $\bar{x}$  è ottimo.*

Poiché le condizioni di Bellman rappresentano l'ammissibilità duale, risulta chiaro che l'unica cosa importante è la differenza tra i valori delle componenti di  $\pi$  (differenza di potenziale). Questa osservazione spiega uno dei motivi per cui il problema duale di quello dei flussi venga chiamato problema dei potenziali.

Nel caso in cui il flusso  $\bar{x}$  sia non degenere, le condizioni di Bellman diventano necessarie e sufficienti per l'ottimalità.

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

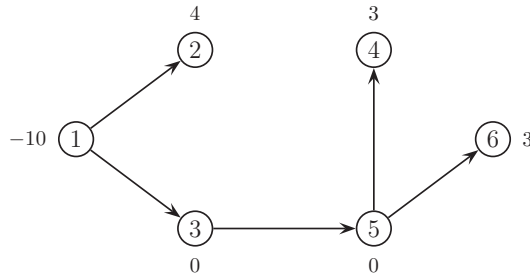
**Esempio 6.2.1.** Consideriamo il flusso di costo minimo non capacitato sul seguente grafo:



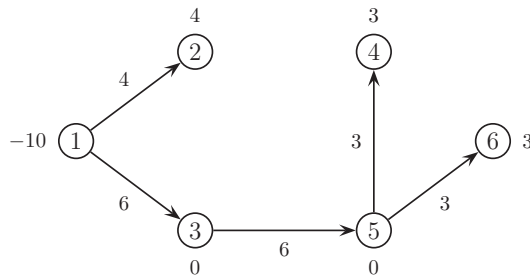
Consideriamo la base generata dalla partizione

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (5, 4), (5, 6)\} \quad L = \{(2, 3), (2, 4), (4, 6)\}.$$

Calcoliamo il flusso di base  $\bar{x}$  facendo una visita per foglie dell'albero di copertura  $T$ . Sul grafo che segue indichiamo i bilanci ai nodi e gli archi che formano l'albero  $T$ :



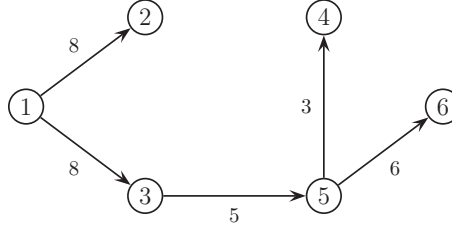
Partendo dalla foglia 6 che ha bilancio 3 si trova che  $\bar{x}_{56} = 3$ . Anche la foglia 4 ha bilancio 3 e quindi  $\bar{x}_{54} = 3$ . Poiché il bilancio del nodo 5 è 0, il flusso sull'arco (3,5) deve essere uguale alla somma dei flussi sugli archi (5,4) e (5,6), cioè  $\bar{x}_{35} = 6$ . Anche il bilancio del nodo 3 è 0 e quindi  $\bar{x}_{13} = 6$ . Infine il bilancio del nodo 2 è 4 e si ottiene  $\bar{x}_{12} = 4$ . Sul grafo che segue indichiamo il flusso sugli archi ed i bilanci ai nodi:



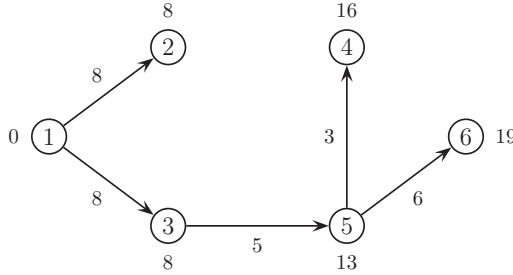
## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO

Tale flusso è ammissibile e non degenerare perché ogni arco ha flusso positivo.

Calcoliamo ora il potenziale di base  $\bar{\pi}$ . Sul grafo che segue indichiamo il costo sugli archi che formano l'albero  $T$ :



Partiamo fissando  $\bar{\pi}_1 = 0$ . Poiché deve essere nullo il costo ridotto dell'arco  $(1,2)$ , si trova che  $\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_1 + c_{12} = 8$ . Per lo stesso motivo si trova che  $\bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_1 + c_{13} = 8$ . Dal potenziale del nodo 3 otteniamo il potenziale del nodo 5:  $\bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_3 + c_{35} = 13$ . Infine, dal potenziale del nodo 5 troviamo il potenziale del nodo 4:  $\bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_5 + c_{54} = 16$  ed il potenziale del nodo 6:  $\bar{\pi}_6 = \bar{\pi}_5 + c_{56} = 19$ . Sul grafo che segue indichiamo il costo sugli archi ed i potenziali ai nodi:



Per studiare l'ammissibilità di  $\bar{\pi}$  calcoliamo i costi ridotti degli archi di  $L$ :

$$\begin{aligned} c_{23}^{\bar{\pi}} &= 1 + 8 - 8 = 1 \\ c_{24}^{\bar{\pi}} &= 9 + 8 - 16 = 1 \\ c_{46}^{\bar{\pi}} &= 5 + 16 - 19 = 2 \end{aligned}$$

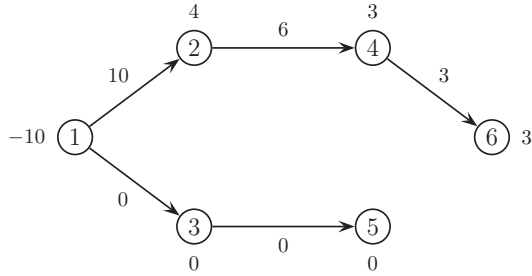
I costi ridotti sono tutti positivi e quindi  $\bar{\pi}$  è ammissibile e non degenerare. Inoltre dal teorema di Bellman segue che il flusso  $\bar{x}$  è ottimo.

Consideriamo ora un'altra partizione:

$$T = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,6)\} \quad L = \{(2,3), (5,4), (5,6)\}.$$

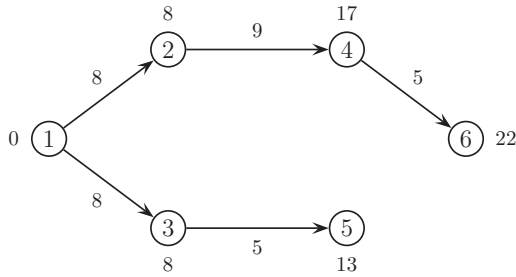
Operando come prima con una visita per foglie, si trova il flusso di base. Sul grafo indichiamo il flusso sugli archi ed i bilanci ai nodi:

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO



Tale flusso è ammissibile e degenere perché tre archi hanno flusso positivo e due flusso nullo.

Sul grafo che segue indichiamo il costo sugli archi ed i potenziali di base:



Calcoliamo i costi ridotti degli archi di  $L$ :

$$\begin{aligned} c_{23}^{\bar{\pi}} &= 1 + 8 - 8 = 1 \\ c_{54}^{\bar{\pi}} &= 3 + 13 - 17 = -1 \\ c_{56}^{\bar{\pi}} &= 6 + 13 - 22 = -3 \end{aligned}$$

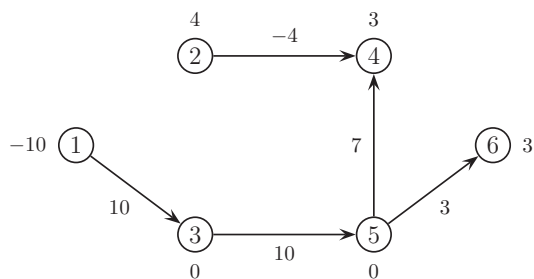
Il potenziale di base è non ammissibile (due costi ridotti sono negativi) e non degenere (tutti i costi ridotti sono diversi da 0).

Consideriamo ora la partizione:

$$T = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 4), (5, 6)\} \quad L = \{(1, 2), (2, 3), (4, 6)\}.$$

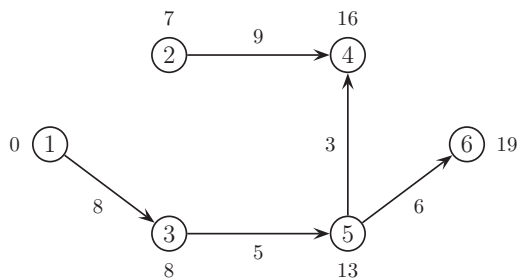
Sul grafo indichiamo il flusso di base sugli archi ed i bilanci ai nodi:

## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO



Tale flusso è non ammissibile (un flusso è negativo) e non degenere (tutti i flussi sono diversi da 0).

Sul grafo che segue indichiamo il costo sugli archi ed i potenziali di base:



Calcoliamo i costi ridotti degli archi di  $L$ :

$$\begin{aligned} c_{12}^{\bar{\pi}} &= 8 + 0 - 7 = 1 \\ c_{23}^{\bar{\pi}} &= 1 + 7 - 8 = 0 \\ c_{46}^{\bar{\pi}} &= 5 + 16 - 19 = 2 \end{aligned}$$

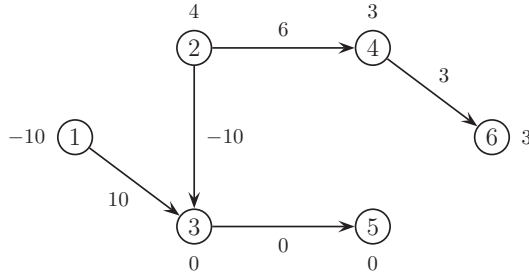
Il potenziale di base è ammissibile e degenere perché un costo ridotto è nullo e gli altri due sono positivi.

Consideriamo infine la seguente partizione:

$$T = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\} \quad L = \{(1, 2), (5, 4), (5, 6)\}.$$

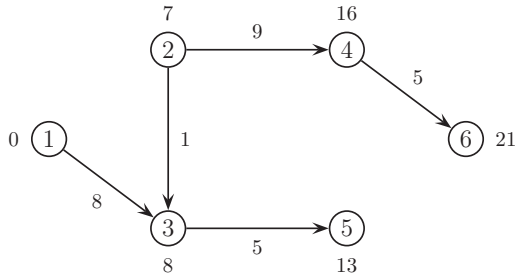
Sul grafo indichiamo il flusso di base sugli archi ed i bilanci ai nodi:

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO



Tale flusso è non ammissibile (un flusso è negativo) e degenere (un flusso è nullo).

Sul grafo che segue indichiamo il costo sugli archi ed i potenziali di base:



Calcoliamo i costi ridotti degli archi di  $L$ :

$$c_{12}^{\bar{\pi}} = 8 + 0 - 7 = 1$$

$$c_{54}^{\bar{\pi}} = 3 + 13 - 16 = 0$$

$$c_{56}^{\bar{\pi}} = 6 + 13 - 21 = -2$$

Il potenziale di base è non ammissibile (un costo ridotto è negativo) e degenere (un costo ridotto è nullo).  $\square$

Per il flusso di costo minimo non capacitato, il teorema degli scarti complementari si semplifica nel seguente modo.

**Teorema 6.2.3.** (Scarti complementari)

- Un flusso ammissibile  $x$  è ottimo se e solo se esiste un potenziale  $\pi$  tale che:

$$\begin{cases} c_{ij}^{\pi} \geq 0 & \text{se } x_{ij} = 0, \\ c_{ij}^{\pi} = 0 & \text{se } x_{ij} > 0. \end{cases}$$

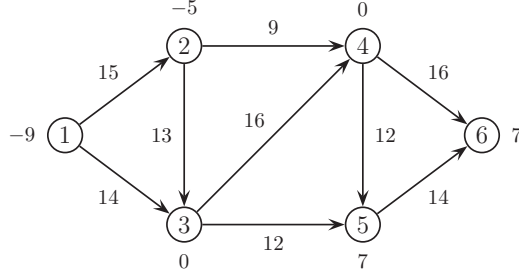


## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO

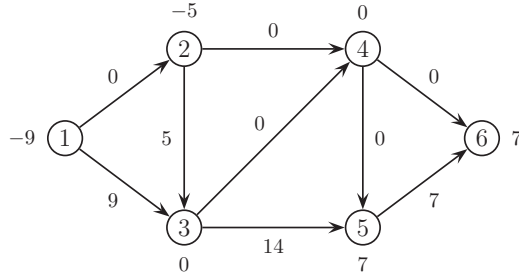
- Un potenziale ammissibile  $\pi$  è ottimo se e solo se esiste un flusso  $x$  tale che

$$\begin{cases} Ex = b \\ x_{ij} \geq 0 & \text{se } c_{ij}^\pi = 0 \\ x_{ij} = 0 & \text{se } c_{ij}^\pi > 0. \end{cases}$$

**Esempio 6.2.2.** Consideriamo il seguente problema di flusso di costo minimo (sugli archi sono indicati i costi e sui nodi i bilanci):



Vogliamo stabilire se il seguente flusso ammissibile sia ottimo (indichiamo il flusso sugli archi ed i bilanci ai nodi):



Per il teorema degli scarti complementari, il flusso è ottimo se e solo se esiste un potenziale ammissibile con costi ridotti nulli sugli archi con flusso positivo. Vediamo se è possibile trovare un potenziale  $\pi$  con queste proprietà. Partiamo fissando  $\pi_1 = 0$ . Poiché i costi ridotti degli archi  $(1,3)$ ,  $(2,3)$ ,  $(3,5)$ ,  $(5,6)$  sono nulli, ricaviamo alcuni potenziali ai nodi:

$$\begin{aligned} x_{13} = 9 &\implies \pi_3 = c_{13} + \pi_1 = 14 + 0 = 14 \\ x_{23} = 5 &\implies \pi_2 = \pi_3 - c_{23} = 14 - 13 = 1 \\ x_{35} = 14 &\implies \pi_5 = c_{35} + \pi_3 = 12 + 14 = 26 \\ x_{56} = 7 &\implies \pi_6 = c_{56} + \pi_5 = 14 + 26 = 40 \end{aligned}$$

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

Consideriamo ora gli archi (2,4) e (4,5) che hanno flusso nullo e quindi devono avere costi ridotti non negativi:

$$\begin{aligned} x_{24} = 0 &\implies c_{24}^\pi = 9 + 1 - \pi_4 \geq 0 \implies \pi_4 \leq 10 \\ x_{45} = 0 &\implies c_{45}^\pi = 12 + \pi_4 - 26 \geq 0 \implies \pi_4 \geq 14 \end{aligned}$$

che è impossibile. Quindi un potenziale con le proprietà richieste non esiste ed il flusso indicato in precedenza non è ottimo.

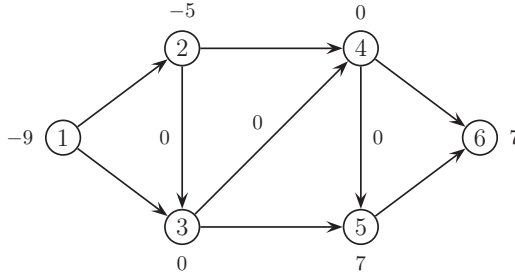
Ora vogliamo stabilire se il potenziale  $\pi = (0, 15, 14, 24, 26, 40)^\top$  sia ottimo. Controlliamo intanto se è ammissibile, calcolando i costi ridotti:

$$\begin{aligned} c_{12}^\pi &= 15 + 0 - 15 = 0 \\ c_{13}^\pi &= 14 + 0 - 14 = 0 \\ c_{23}^\pi &= 13 + 15 - 14 = 14 \\ c_{24}^\pi &= 9 + 15 - 24 = 0 \\ c_{34}^\pi &= 16 + 14 - 24 = 6 \\ c_{35}^\pi &= 12 + 14 - 26 = 0 \\ c_{45}^\pi &= 12 + 24 - 26 = 10 \\ c_{46}^\pi &= 16 + 24 - 40 = 0 \\ c_{56}^\pi &= 14 + 26 - 40 = 0 \end{aligned}$$

Il potenziale è ammissibile. Per il teorema degli scarti complementari tale potenziale è ottimo se e solo se esiste un flusso ammissibile che sia nullo sugli archi con costi ridotti positivi. Gli archi con costi ridotti positivi sono (2,3), (3,4) e (4,5), quindi:

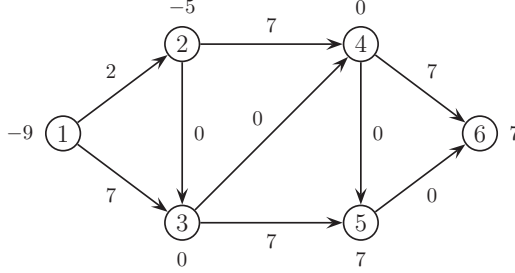
$$x_{23} = 0 \quad x_{34} = 0 \quad x_{45} = 0.$$

Ora dobbiamo determinare i flussi sugli altri archi in modo che siano rispettati i bilanci ai nodi e le capacità inferiori sugli archi:



È facile osservare che ci sono infiniti flussi con le proprietà richieste: basta spedire tra 7 e 9 unità di flusso sull'arco (1,3) e ricavare gli altri flussi in modo da soddisfare i bilanci ai nodi. Ad esempio, uno di tali flussi è:

## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO



Quindi il potenziale  $\pi = (0, 15, 14, 24, 26, 40)$  è ottimo.  $\square$

Risolviamo ora il problema (6.2) con l'algoritmo del simplesso duale che, in questo caso, chiameremo simplesso per flussi.

L'arco entrante  $(p, q)$  forma un ciclo con gli archi dell'albero  $T$  ed il costo di tale ciclo è uguale al costo ridotto dell'arco  $(p, q)$  che è negativo. Quindi spedire flusso lungo tale ciclo fa diminuire il valore della funzione obiettivo.

Per calcolare il nuovo flusso di base basta spedire  $\vartheta$  unità di flusso lungo il ciclo trovato nel cambio di base. Il primo (in ordine lessicografico) arco del ciclo che si svuota esce dall'albero  $T$ .

Quando  $\vartheta = 0$  significa che siamo in un flusso di base degenerare, cioè si cambia la partizione  $(T, L)$  senza cambiare il flusso  $\bar{x}$ .

Se non ci sono archi discordi nel ciclo, allora non ci sono limiti sul flusso che può essere spedito lungo il ciclo, e quindi il valore della funzione obiettivo tende a  $-\infty$ .

Vediamo ora come aggiornare il potenziale di base senza risolvere il sistema  $\pi^T E_T = c_T^T$ . L'arco  $(p, q)$  entra in  $T$  e l'arco  $(r, s)$  esce da  $T$ . La rimozione di  $(r, s)$  dall'albero  $T$  genera una partizione dell'insieme  $N$  dei nodi in due sottoinsiemi sconnessi  $N_p$  e  $N_q$  che contengono, rispettivamente, i nodi  $p$  e  $q$ . Poiché i potenziali dei nodi sono definiti a meno di una costante additiva, possiamo supporre che i potenziali dei nodi dell'insieme  $N_p$  (oppure in modo equivalente dell'insieme  $N_q$ ) rimangano invariati. Indichiamo con  $\bar{\pi}$  i vecchi potenziali e con  $\pi'$  i nuovi potenziali. Poiché l'arco  $(p, q)$  entra in  $T$ , il suo costo ridotto, calcolato con i nuovi potenziali, deve essere nullo:

$$0 = c_{pq} + \pi'_p - \pi'_q = c_{pq} + \bar{\pi}_p - \pi'_q,$$

e quindi

$$\pi'_q = c_{pq} + \bar{\pi}_p = \bar{\pi}_q + \bar{c}_{pq},$$

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

### Algoritmo del simplesso per flussi (non capacitato)

1. Trova una partizione degli archi  $(T, L)$ , con  $T$  un albero di copertura, che generi un flusso ammissibile.
2. Calcola il flusso di base  $\bar{x}$ :

$$\bar{x}_T := E_T^{-1} b, \quad \bar{x}_L := 0,$$

ed il potenziale di base  $\bar{\pi}^T := c_T^T E_T^{-1}$ . Indica con  $c_{ij}^{\bar{\pi}} := c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j$  il costo ridotto di ogni arco  $(i, j)$ .

3. **if**  $c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0$  per ogni  $(i, j) \in L$   
**then** STOP ( $\bar{x}$  è un flusso ottimo e  $\bar{\pi}$  è un potenziale ottimo).  
**else** calcola l'arco entrante

$$(p, q) := \min \{(i, j) \in L : c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0\}$$

dove il minimo è fatto rispetto all'ordine lessicografico sugli archi. L'arco  $(p, q)$  forma un ciclo  $\mathcal{C}$  con gli archi di  $T$ . Fissa su  $\mathcal{C}$  un verso concorde con  $(p, q)$  ed indica con  $\mathcal{C}^-$  l'insieme gli archi del ciclo discordi con il verso fissato.

4. **if**  $\mathcal{C}^- = \emptyset$  **then** STOP (il flusso di costo minimo ha valore ottimo  $-\infty$ ).  
**else** calcola

$$\vartheta := \min \{\bar{x}_{ij} : (i, j) \in \mathcal{C}^-\}.$$

e trova l'arco uscente

$$(r, s) := \min \{(i, j) \in \mathcal{C}^- : \bar{x}_{ij} = \vartheta\}$$

dove il minimo è sempre fatto rispetto all'ordine lessicografico sugli archi.

5. aggiorna la partizione:

$$T := T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}, \quad L := L \setminus \{(p, q)\} \cup \{(r, s)\},$$

e torna al passo 2.

## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO

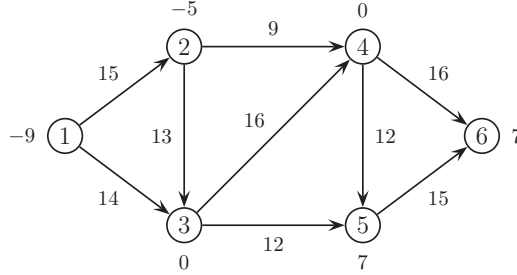
ossia il nuovo potenziale del nodo  $q$  (e quindi di tutti i nodi di  $N_q$  che sono connessi a  $q$ ) è ottenuto dal vecchio potenziale sommando il costo ridotto dell'arco entrante  $(p, q)$ . Riassumendo, il nuovo potenziale di base  $\pi'$  è dato da:

$$\pi'_i = \begin{cases} \bar{\pi}_i & \text{se } i \in N_p, \\ \bar{\pi}_i + c_{pq}^\pi & \text{se } i \in N_q. \end{cases}$$

I costi ridotti degli archi che connettono due nodi di  $N_p$  non cambiano perché in  $N_p$  i potenziali sono invariati e non cambiano neanche i costi ridotti degli archi che connettono due nodi di  $N_q$  perché in  $N_q$  tutti i potenziali sono stati aumentati della stessa quantità  $c_{pq}^\pi$ . Di conseguenza cambiano solo i costi ridotti degli archi che hanno un estremo in  $N_p$  e l'altro in  $N_q$ . Indicando con  $c_{ij}^{\pi'}$  i nuovi costi ridotti e con  $c_{ij}^\pi$  i vecchi costi ridotti, otteniamo:

$$c_{ij}^{\pi'} = \begin{cases} c_{ij}^\pi & \text{se } i, j \in N_p \text{ oppure } i, j \in N_q, \\ c_{ij}^\pi - c_{pq}^\pi & \text{se } i \in N_p \text{ e } j \in N_q, \\ c_{ij}^\pi + c_{pq}^\pi & \text{se } i \in N_q \text{ e } j \in N_p. \end{cases}$$

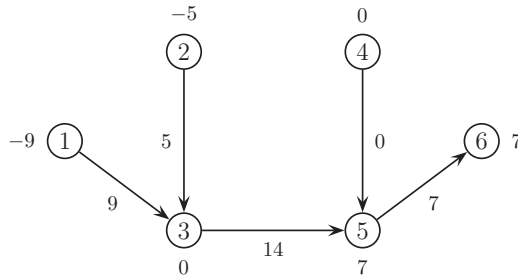
**Esempio 6.2.3.** Consideriamo il seguente problema di flusso di costo minimo:



Risolviamo tale problema applicando il simplesso per flussi a partire dalla base

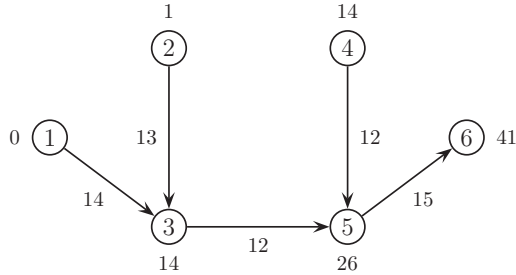
$$T = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}.$$

**1° iterazione.** Facendo una visita per foglie di  $T$  troviamo il seguente flusso di base (sui nodi sono indicati i bilanci):



## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

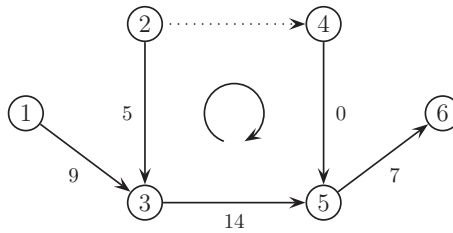
Tale flusso di base è degenere perché l'arco  $(4,5)$  ha flusso nullo. Calcoliamo ora il potenziale di base (sugli archi indichiamo i costi):



Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi che non appartengono a  $T$ :

$$\begin{aligned} c_{12}^{\bar{\pi}} &= 15 + 0 - 1 = 14 \\ c_{24}^{\bar{\pi}} &= 9 + 1 - 14 = -4 \end{aligned}$$

L'arco  $(2,4)$  ha costo ridotto negativo e quindi entra in base. Esso forma con gli archi di  $T$  il seguente ciclo (sugli archi sono indicati i flussi):



Gli archi discordi al verso del ciclo sono  $(2,3)$  e  $(3,5)$ , quindi

$$\vartheta = \min \{ \bar{x}_{23}, \bar{x}_{35} \} = \min \{ 5, 14 \} = 5.$$

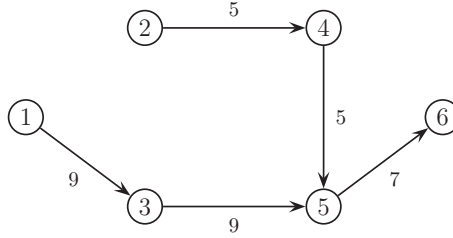
L'arco  $(2,3)$  si svuota ed esce dalla base.

**2° iterazione.** La nuova base risulta essere

$$T = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6) \}$$

ed il nuovo flusso di base diventa:

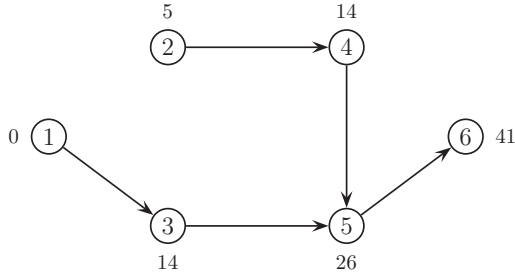
## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO



Nel nuovo potenziale di base cambia solo il valore del nodo 2:

$$\pi'_2 = \bar{\pi}_2 - c_{24}^{\bar{\pi}} = 1 - (-4) = 5.$$

quindi i potenziali diventano:

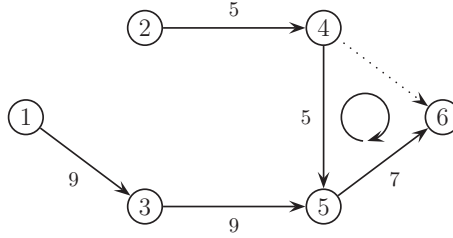


Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi non di base:

$$\begin{aligned} c_{12}^{\bar{\pi}} &= 15 + 0 - 5 = 10 \\ c_{23}^{\bar{\pi}} &= 13 + 5 - 14 = 4 \\ c_{34}^{\bar{\pi}} &= 16 + 14 - 14 = 16 \\ c_{46}^{\bar{\pi}} &= 16 + 14 - 41 = -11 \end{aligned}$$

L'arco (4,6) ha costo ridotto negativo e quindi entra in base. Esso forma con gli archi di  $T$  il seguente ciclo (sugli archi sono indicati i flussi):

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO



Gli archi discordi al verso del ciclo sono (4,5) e (5,6), quindi

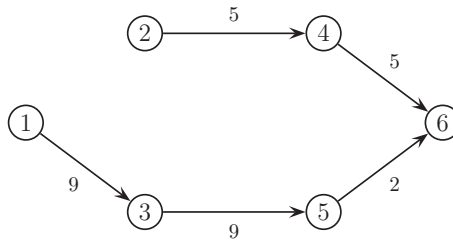
$$\vartheta = \min \{ \bar{x}_{45}, \bar{x}_{56} \} = \min \{ 5, 7 \} = 5.$$

L'arco (4,5) si svuota ed esce dalla base.

**3° iterazione.** La nuova base è

$$T = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 6) \}$$

ed il nuovo flusso di base diventa:



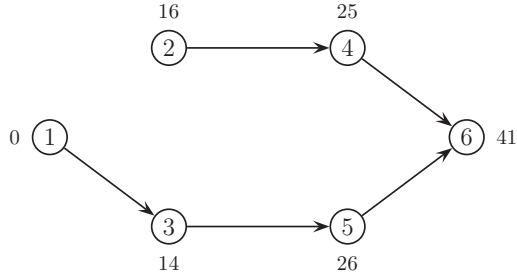
Nel nuovo potenziale di base cambia solo i valori dei nodi 2 e 4:

$$\begin{aligned} \pi'_2 &= \bar{\pi}_2 - c_{45}^{\bar{\pi}} = 5 - (-11) = 16 \\ \pi'_4 &= \bar{\pi}_4 - c_{45}^{\bar{\pi}} = 14 - (-11) = 25 \end{aligned}$$

quindi i potenziali diventano:



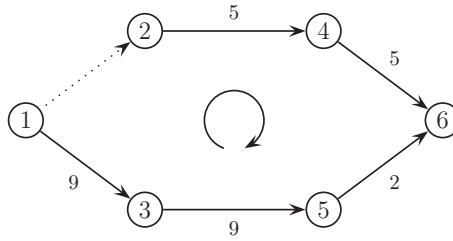
## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO



Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi non di base:

$$c_{12}^{\bar{\pi}} = 15 + 0 - 16 = -1$$

L'arco (1,2) ha costo ridotto negativo e quindi entra in base. Esso forma con gli archi di  $T$  il seguente ciclo (sugli archi sono indicati i flussi):



Gli archi discordi al verso del ciclo sono (1,3), (3,5) e (5,6), quindi

$$\vartheta = \min \{ \bar{x}_{13}, \bar{x}_{35}, \bar{x}_{56} \} = \min \{ 9, 9, 2 \} = 2.$$

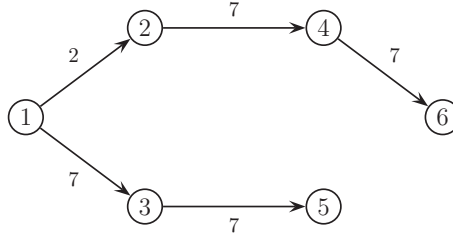
L'arco (5,6) si svuota ed esce dalla base.

**4° iterazione.** La nuova base è

$$T = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,6)\}$$

ed il nuovo flusso di base diventa:

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO



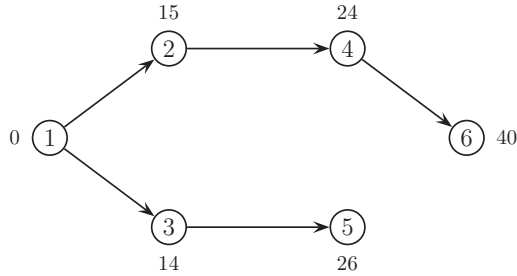
Nel nuovo potenziale di base cambiano i valori dei nodi 2, 4 e 6:

$$\pi'_2 = \bar{\pi}_2 + c_{12}^{\bar{\pi}} = 16 + (-1) = 15$$

$$\pi'_4 = \bar{\pi}_4 + c_{12}^{\bar{\pi}} = 25 + (-1) = 24$$

$$\pi'_6 = \bar{\pi}_6 + c_{12}^{\bar{\pi}} = 41 + (-1) = 40$$

quindi i potenziali diventano:



Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi non di base:

$$c_{23}^{\bar{\pi}} = 13 + 15 - 14 = 14$$

$$c_{34}^{\bar{\pi}} = 16 + 14 - 24 = 6$$

$$c_{45}^{\bar{\pi}} = 12 + 24 - 26 = 10$$

$$c_{56}^{\bar{\pi}} = 15 + 26 - 40 = 1$$

Essendo positivi tutti i costi ridotti degli archi non di base, l'ultimo flusso di base calcolato è ottimo.

□

## 6.2 FLUSSO DI COSTO MINIMO NON CAPACITATO

Al passo 1 del simplesso per flussi è necessario conoscere una partizione  $(T, L)$  che generi un flusso di base ammissibile. Poiché il simplesso per flussi non è altro che il simplesso duale applicato al flusso di costo minimo, il problema di trovare una partizione ammissibile  $(T, L)$  è stato risolto nel paragrafo 3.2 in cui abbiamo visto come costruire il problema ausiliario duale per trovare una base ammissibile da usare nel passo 1 del simplesso duale. Il problema ausiliario di (6.2) è il seguente:

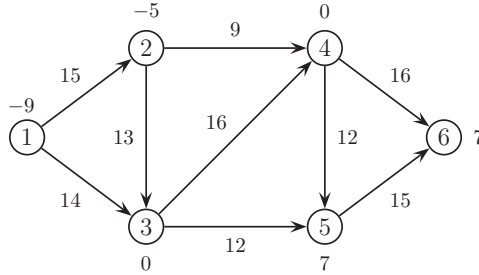
$$\begin{cases} \min \sum_{i \in N} \varepsilon_i \\ E_i x + \varepsilon_i = b_i & \text{se } b_i \geq 0 \\ E_i x - \varepsilon_i = b_i & \text{se } b_i < 0 \\ x, \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

dove  $\varepsilon_i$  sono le variabili ausiliarie, una per ogni nodo  $i \in N$ , ed  $E_i$  sono le righe della matrice di incidenza  $E$ . Tale problema ausiliario è un flusso di costo minimo su un grafo i cui nodi sono i nodi di  $N$  più un nodo ausiliario 0 (con bilancio nullo) ed i cui archi sono gli archi di  $A$  più gli archi ausiliari che vanno dai nodi  $i$  con bilancio  $b_i < 0$  al nodo 0 e dal nodo 0 ai nodi  $i$  con  $b_i \geq 0$ . Gli archi ausiliari hanno costo 1, mentre gli archi di  $A$  hanno costo nullo. La seguente partizione:

$$T = \{\text{archi ausiliari}\} \quad L = \{\text{archi di } A\},$$

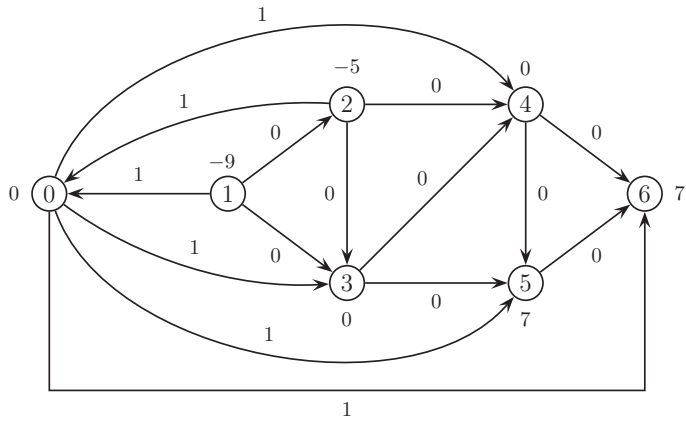
fornisce un flusso di base ammissibile per il problema ausiliario. Da tale base può partire il simplesso per flussi per risolvere il problema ausiliario. Se il problema ausiliario ha valore ottimo positivo, allora non esiste un flusso ammissibile sul grafo originario  $(N, A)$ ; se invece il problema ausiliario ha valore ottimo nullo, allora il flusso ottimo del problema ausiliario è ammissibile per il problema originario e dalla base ottima del problema ausiliario si può ricavare una base ammissibile per il problema originario.

**Esempio 6.2.4.** Consideriamo il flusso di costo minimo dell'Esempio 6.2.3:



Il problema ausiliario è il flusso di costo minimo sul seguente grafo (sui nodi sono indicati i bilanci e sugli archi i costi):

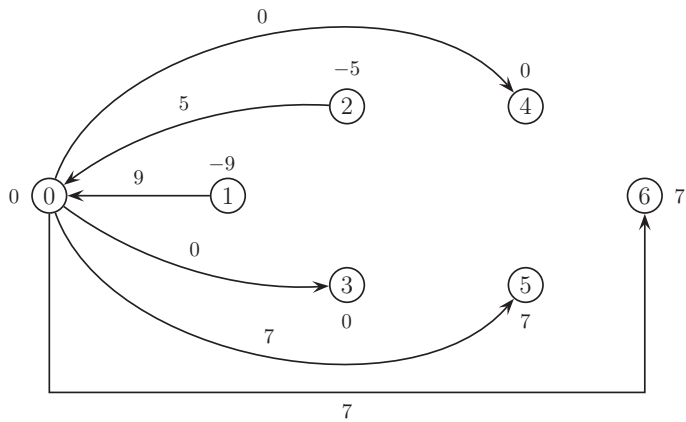
## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO



La base

$$T = \{(0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (1, 0), (2, 0)\}$$

fornisce il seguente flusso ammissibile:

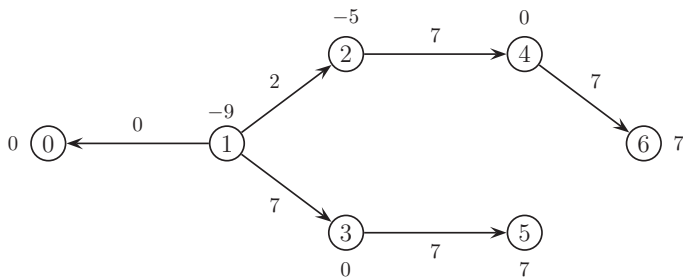


### 6.3 FLUSSI E POTENZIALI DI BASE

Applichiamo il simplesso per flussi al problema ausiliario a partire da tale base ammissibile e, alla fine, otteniamo la base ottima:

$$T = \{(1, 0), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

con il relativo flusso ottimo:



Il valore ottimo del problema ausiliario è 0 (gli archi ausiliari hanno flusso nullo) e quindi il flusso precedente è ammissibile per il problema iniziale e corrisponde alla base ammissibile:

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}.$$

Il simplesso per flussi può partire da questa base per risolvere il problema iniziale.  $\square$

## 6.3 Flussi e potenziali di base

In questo paragrafo studieremo le basi e le soluzioni di base del problema capacitato (6.1). Riscriviamo tale problema in forma duale aggiungendo le variabili di scarto  $w$ :

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & E x = b \\ & x + w = u \\ & x, w \geq 0 \end{cases}$$

ossia in forma matriciale come

$$\begin{cases} \min & (x, w)^T \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ & (x, w)^T \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = (b, u)^T \\ & (x, w) \geq 0 \end{cases}$$

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

La matrice

$$M = \left( \begin{array}{c|c} E^T & I \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

ha dimensione  $(m+m) \times (n-1+m)$  e ha rango  $n-1+m$  perché, per il Corollario 6.1.1, la matrice  $E$  ha rango  $n-1$ . Quindi per ottenere una matrice di base bisogna estrarre  $n-1+m$  righe linearmente indipendenti. Vediamo come trovare queste  $n-1+m$  righe di  $M$ .

**Teorema 6.3.1.** *Consideriamo una tripartizione  $(T, L, U)$  dell'insieme degli archi, ossia suddividiamo gli archi in tre sottoinsiemi disgiunti  $T$ ,  $L$  ed  $U$ , dove  $T$  è un albero di copertura. Indichiamo con  $T'$ ,  $L'$  ed  $U'$  le righe di  $M$  corrispondenti alle variabili di scarto  $w$ . Allora l'insieme*

$$B = T \cup U \cup T' \cup L'$$

*è una base ed il determinante della corrispondente matrice è 1 oppure  $-1$ .*

**Dimostrazione.** Indicizziamo le righe di  $M$  come  $T, L, U, T', L', U'$  e riscriviamo  $M$  a blocchi:

$$M = \left( \begin{array}{ccc|ccc} E_T^T & I_T & 0 & 0 & & \\ E_L^T & 0 & I_L & 0 & & \\ E_U^T & 0 & 0 & I_U & & \\ \hline 0 & I_{T'} & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & I_{L'} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & I_{U'} & & \end{array} \right)$$

Dobbiamo dimostrare che la sottomatrice a blocchi

$$M_B = \left( \begin{array}{ccc|cc} E_T^T & I_T & 0 & 0 & \\ E_U^T & 0 & 0 & I_U & \\ \hline 0 & I_{T'} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & I_{L'} & 0 & \end{array} \right)$$

è invertibile. Calcoliamo il determinante di  $M_B$  sviluppando prima lungo le righe di  $I_{L'}$ , poi lungo le righe di  $I_{T'}$  ed infine lungo le colonne di  $I_U$ :

$$\det(M_B) = \det \left( \begin{array}{ccc|cc} E_T^T & I_T & 0 & & \\ E_U^T & 0 & I_U & & \\ \hline 0 & I_{T'} & 0 & & \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{cc} E_T^T & 0 \\ E_U^T & I_U \end{array} \right) = \det(E_T^T).$$

Poiché  $T$  è un albero di copertura, dalla Proposizione 6.1.3 sappiamo che  $E_T$  è invertibile con determinante  $\pm 1$ . □

Osserviamo che l'unico altro modo di costruire una base, che è sostanzialmente equivalente a quello del Teorema 6.3.1, è quello di scegliere gli indici  $T, L, T', U'$ , sempre con  $T$  un albero di copertura. Il determinante della matrice di base, anche in tal caso, è  $\pm 1$ .

Anche nel caso di problemi capacitati abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 6.3.2.** (Dell'interrezza)

*Se i vettori  $u$  e  $b$  sono a componenti intere, allora le soluzioni di base del poliedro dei flussi sono a componenti intere.*

**Dimostrazione.** Segue dal fatto che le matrici di base hanno il determinante uguale a  $\pm 1$ .  $\square$

Calcoliamo ora la soluzione di base relativa alla base  $B = T \cup U \cup T' \cup L'$ . Poiché gli indici in  $L$  e in  $U'$  non sono in base, si ha  $\bar{x}_L = 0$  e  $\bar{w}_{U'} = 0$  cioè  $\bar{x}_U = u_U$ . Ora possiamo calcolare  $\bar{x}_B$ : poiché

$$b = E \bar{x} = \begin{pmatrix} E_T & E_L & E_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_T \\ \bar{x}_L \\ \bar{x}_U \end{pmatrix} = E_T \bar{x}_T + E_L \bar{x}_L + E_U \bar{x}_U = E_T \bar{x}_T + E_U u_U,$$

si ha

$$\bar{x}_T = E_T^{-1} (b - E_U u_U).$$

Questo sistema è di facile risoluzione poiché  $E_T$  può essere scritta, come detto, in forma triangolare inferiore. Quindi la soluzione di base  $(\bar{x}, \bar{w})$  è

$$\begin{aligned} \bar{x}_T &= E_T^{-1} (b - E_U u_U) & \bar{x}_L &= 0 & \bar{x}_U &= u_U \\ \bar{w}_{T'} &= u_{T'} - E_{T'}^{-1} (b - E_U u_U) & \bar{w}_{L'} &= u_{L'} & \bar{w}_{U'} &= 0 \end{aligned}$$

Tale soluzione (flusso) di base è ammissibile se e solo se

$$0 \leq \bar{x}_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{per ogni } (i, j) \in T,$$

cioè se e solo se il flusso sugli archi appartenenti all'albero di copertura  $T$  rispetta i vincoli di capacità (i vincoli di bilancio e quelli di capacità sugli archi di  $L$  e  $U$  sono soddisfatti dalle formule che definiscono  $\bar{x}$ ).

La soluzione di base è degenera se e solo se almeno una componente di base è nulla. Poiché non è possibile che una componente di  $\bar{x}_U$  o di  $\bar{w}_{L'}$  sia nulla (dato che le capacità superiori non sono nulle) il flusso è degenera quando esiste un arco  $(i, j) \in T$  tale che  $\bar{x}_{ij} = 0$  oppure  $\bar{x}_{ij} = u_{ij}$ , il primo caso corrisponde ad una componente nulla di  $x_T$ , il secondo ad una componente nulla di  $w_{T'}$ .

Il duale del flusso di costo minimo, detto problema dei potenziali ai nodi, è dato da:

$$\begin{cases} \max (b, u)^\top \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E^\top & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

che equivale a:

$$\begin{cases} \max \pi^\top b + \mu^\top u \\ \pi^\top E + \mu^\top \leq c^\top \\ \mu \leq 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

Calcoliamo la soluzione di base del problema dei potenziali associata alla base  $B = T \cup U \cup T' \cup L'$ . I vincoli di base sono:

$$\begin{aligned}\pi^T E_T + \mu_T^T &= c_T^T \\ \pi^T E_U + \mu_U^T &= c_U^T \\ \mu_T &= 0 \\ \mu_L &= 0\end{aligned}$$

quindi dalla prima equazione ricaviamo  $\pi^T E_T = c_T^T$  come nel caso non capacitato. Ponendo  $\pi_1 = 0$ , otteniamo il potenziale di base  $\pi^T = c_T^T E_T^{-1}$ . Dalla seconda equazione otteniamo  $\mu_U^T = c_U^T - c_T^T E_T^{-1} E_U$ , quindi la soluzione di base  $(\bar{\pi}, \bar{\mu})$  è:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^T &= c_T^T E_T^{-1} \\ \bar{\mu}_T &= 0 \quad \bar{\mu}_L = 0 \quad \bar{\mu}_U^T = c_U^T - \bar{\pi}^T E_U\end{aligned}$$

Tale soluzione (potenziale) di base è ammissibile se e solo se sono soddisfatti i vincoli non di base, cioè

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^T E_L + \bar{\mu}_L^T &= \bar{\pi}^T E_L \leq c_L^T \\ \bar{\mu}_U &= c_U^T - \bar{\pi}^T E_U \leq 0\end{aligned}$$

ossia

$$\begin{cases} c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 & \text{per ogni } (i, j) \in L, \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} \leq 0 & \text{per ogni } (i, j) \in U. \end{cases}$$

Quindi il potenziale di base  $\bar{\pi}$  è ammissibile se e solo se i costi ridotti degli archi in  $L$  sono non negativi ed i costi ridotti degli archi in  $U$  sono non positivi. Osserviamo inoltre che, dall'equazione che definisce  $\bar{\pi}$ , si deduce che i costi ridotti degli archi in  $T$  sono uguali a 0.

Il potenziale di base  $\bar{\pi}$  è degenere se e solo se un vincolo non di base è aderente a  $(\bar{\pi}, \bar{\mu})$ , ossia quando un arco di  $L$  oppure un arco di  $U$  ha costo ridotto nullo.

Riassumiamo nella tabella i possibili casi per i flussi ed i potenziali di base:

|                 | flusso di base<br>$\bar{x}_T = E_T^{-1}(b - E_U u_U) \quad \bar{x}_L = 0 \quad \bar{x}_U = u_U$                         | potenziale di base<br>$\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}$   |
|-----------------|---|--|
| ammissibile     | $\forall (i, j) \in T$ si ha<br>$0 \leq \bar{x}_{ij} \leq u_{ij}$   | $\forall (i, j) \in L$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0$<br>$\forall (i, j) \in U$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \leq 0$           |
| non ammissibile | $\exists (i, j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} < 0$<br>oppure<br>$\exists (i, j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} > u_{ij}$ | $\exists (i, j) \in L$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0$<br>oppure<br>$\exists (i, j) \in U$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} > 0$ |
| degenere        | $\exists (i, j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = 0$<br>oppure<br>$\exists (i, j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = u_{ij}$ | $\exists (i, j) \in L$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} = 0$<br>oppure<br>$\exists (i, j) \in U$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} = 0$ |
| non degenere    | $\forall (i, j) \in T$ si ha<br>$\bar{x}_{ij} \neq 0 \quad \text{e} \quad \bar{x}_{ij} \neq u_{ij}$                     | $\forall (i, j) \in L$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \neq 0$<br>$\forall (i, j) \in U$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \neq 0$           |



### 6.3 FLUSSI E POTENZIALI DI BASE

Applicando il Teorema 2.4.1 alla coppia di problemi duali flusso/potenziali otteniamo le condizioni di Bellman nel caso capacitato.

**Teorema 6.3.3.** (Bellman)

Supponiamo che una tripartizione  $(T, L, U)$  degli archi generi un flusso di base  $\bar{x}$  ammissibile. Se il potenziale di base  $\bar{\pi}$  è tale che

$$\begin{cases} c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 & \text{per ogni } (i, j) \in L, \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} \leq 0 & \text{per ogni } (i, j) \in U, \end{cases} \quad (\text{condizioni di Bellman})$$

allora  $\bar{x}$  è ottimo.

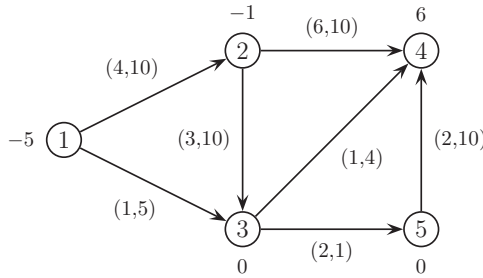
**Dimostrazione.** Abbiamo visto in precedenza che le condizioni sui costi ridotti relativi a  $\bar{\pi}$  sono equivalenti all'ammissibilità della soluzione di base complementare  $(\bar{\pi}, \bar{\mu})$ .  $\square$

Nel caso in cui il flusso di base  $\bar{x}$  sia non degenere le condizioni di Bellman diventano anche necessarie per l'ottimalità.

**Teorema 6.3.4.** Supponiamo che una tripartizione  $(T, L, U)$  degli archi generi un flusso di base  $\bar{x}$  ammissibile e non degenere. Sia  $\bar{\pi}$  il potenziale di base. Allora si ha che:

$$\bar{x} \text{ è ottimo} \iff \begin{cases} c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 & \text{per ogni } (i, j) \in L \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} \leq 0 & \text{per ogni } (i, j) \in U \end{cases}$$

**Esempio 6.3.1.** Consideriamo il problema di flusso di costo minimo sul seguente grafo in cui su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, in ordine, il costo e la capacità:



Data la tripartizione degli archi

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 4)\} \quad L = \{(2, 3), (3, 4)\} \quad U = \{(3, 5)\},$$

calcoliamo il flusso ed il potenziale di base. Sappiamo che gli archi di  $L$  devono essere vuoti e l'arco di  $U$  saturo, quindi abbiamo

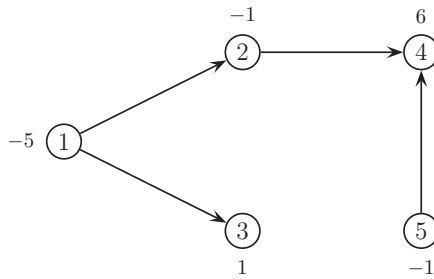
$$\bar{x}_{23} = 0, \quad \bar{x}_{34} = 0, \quad \bar{x}_{35} = u_{35} = 1.$$

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

Dopo aver fissato il flusso sull'arco  $(3, 5)$ , dobbiamo aggiornare i bilanci dei nodi 3 e 5:

$$b_3 = b_3 + \bar{x}_{35} = 0 + 1 = 1, \quad b_5 = b_5 - \bar{x}_{35} = 0 - 1 = -1.$$

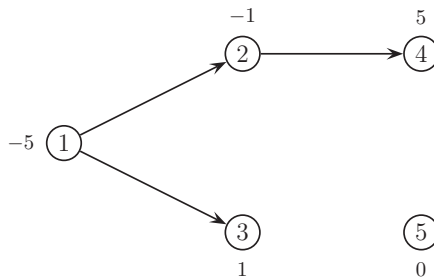
Ora possiamo calcolare i flussi sugli archi di  $T$  rispettando i bilanci aggiornati dei nodi. L'albero  $T$  è il seguente:



Partiamo da una foglia di  $T$ , ad esempio il nodo 5 che ha bilancio  $-1$  e su cui incide solo l'arco  $(5, 4)$  che dovrà avere perciò flusso uguale a 1, quindi aggiorniamo anche il bilancio dei nodi 4 e 5:

$$\bar{x}_{54} = 1, \quad b_4 = 6 - 1 = 5, \quad b_5 = -1 + 1 = 0.$$

Abbiamo così bilanciato il nodo 5 e rimane da trovare il flusso sul seguente sottoalbero:

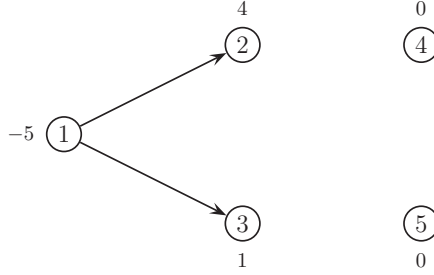


Applichiamo la stessa procedura a questo sottoalbero partendo da una foglia, ad esempio il nodo 4 che ha bilancio 5 e su cui incide solo l'arco  $(2, 4)$  che deve quindi avere flusso uguale a 5:

$$\bar{x}_{24} = 5, \quad b_4 = 5 - 5 = 0, \quad b_2 = -1 + 5 = 4.$$

A questo punto rimangono da determinare solamente i flussi sugli archi  $(1, 2)$  e  $(1, 3)$ :

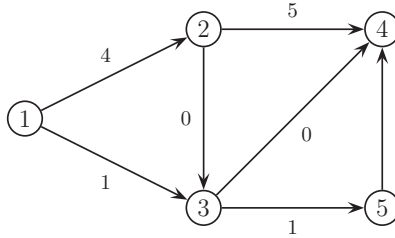
### 6.3 FLUSSI E POTENZIALI DI BASE



Poiché il nodo 2 ha bilancio 4 ed il nodo 3 ha bilancio 1 si ha che

$$\bar{x}_{12} = 4, \quad \bar{x}_{13} = 1.$$

Poiché tutti i flussi sugli archi di  $T$  soddisfano i vincoli di capacità, il flusso di base



è ammissibile. Inoltre tale flusso è non degenerare perché nessun arco di  $T$  è vuoto o saturo.

Calcoliamo ora il potenziale di base. Poiché il sistema  $\bar{\pi}^T E_T = c^T$  è sottodeterminato, fissiamo arbitrariamente il potenziale di un nodo qualunque, ad esempio  $\bar{\pi}_1 = 0$ , e calcoliamo il potenziale degli altri nodi a partire dal nodo 1 passando sugli archi di  $T$ . Sappiamo che il costo ridotto degli archi di  $T$  deve essere nullo, ossia

$$\bar{\pi}_j - \bar{\pi}_i = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in T,$$

quindi consideriamo gli archi di  $T$  che incidono sul nodo 1, ossia (1,2) e (1,3) e ricaviamo i potenziali dei nodi 2 e 3:

$$\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_1 + c_{12} = 0 + 4 = 4, \quad \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_1 + c_{13} = 0 + 1 = 1.$$

A questo punto non ci sono altri archi di  $T$  incidenti sul nodo 3, ma c'è l'arco (2,4) incidente sul nodo 2, quindi ricaviamo il potenziale del nodo 4:

$$\bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_2 + c_{24} = 4 + 6 = 10.$$

Infine calcoliamo il potenziale del nodo 5 sfruttando l'arco (5,4):

$$\bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_4 - c_{54} = 10 - 2 = 8.$$

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

Per controllare l'ammissibilità di tale potenziale di base, dobbiamo calcolare i costi ridotti degli archi di  $L$  e  $U$ :

$$\begin{aligned} c_{23}^{\bar{\pi}} &= c_{23} + \bar{\pi}_2 - \bar{\pi}_3 = 3 + 4 - 1 = 6 > 0, \\ c_{34}^{\bar{\pi}} &= c_{34} + \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_4 = 1 + 1 - 10 = -8 < 0, \\ c_{35}^{\bar{\pi}} &= c_{35} + \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_5 = 2 + 1 - 8 = -5 < 0. \end{aligned}$$

Il potenziale non è ammissibile perché l'arco  $(3, 4) \in L$  ha costo ridotto negativo, inoltre il potenziale è non degenere perché nessuno dei tre archi di  $L$  e  $U$  ha costo ridotto nullo.

Riassumendo, il flusso di base è ammissibile e non degenere, mentre il potenziale di base non è ammissibile, quindi, per il Teorema 6.3.4, il flusso di base non è ottimo.  $\square$

Vediamo ora quale forma assume il teorema degli scarti complementari applicato al problema capacitato.

**Teorema 6.3.5.** (Scarti complementari)

- Un flusso ammissibile  $x$  è ottimo se e solo se esiste un potenziale  $\pi$  tale che:

$$\begin{cases} c_{ij}^{\pi} \geq 0 & \text{se } x_{ij} = 0 \\ c_{ij}^{\pi} = 0 & \text{se } 0 < x_{ij} < u_{ij} \\ c_{ij}^{\pi} \leq 0 & \text{se } x_{ij} = u_{ij} \end{cases}$$

- Un potenziale  $\pi$  è ottimo se e solo se esiste un flusso  $x$  tale che:

$$\begin{cases} Ex = b \\ x_{ij} = u_{ij} & \text{se } c_{ij}^{\pi} < 0 \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \text{se } c_{ij}^{\pi} = 0 \\ x_{ij} = 0 & \text{se } c_{ij}^{\pi} > 0 \end{cases}$$

**Dimostrazione.** Osserviamo che  $\pi$  è un potenziale ottimo quando  $(\pi, \mu)$  è una soluzione ottima per il problema dei potenziali con  $\mu$  così definito:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{ij}^{\pi} \geq 0, \\ c_{ij}^{\pi} & \text{se } c_{ij}^{\pi} < 0. \end{cases}$$

Per il teorema degli scarti complementari sappiamo che  $x$  è un flusso ottimo e  $(\pi, \mu)$  è ottimo per il problema dei potenziali se e solo se  $x$  è in scarti complementari con  $(\pi, \mu)$ , ossia se  $x$ ,  $\pi$  e  $\mu$  soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0, & \pi^T E + \mu^T \leq c^T, & (c^T - \pi^T E - \mu^T)x = 0, \\ x \leq u, & \mu \leq 0, & \mu^T(u - x) = 0. \end{cases}$$

cioè per ogni arco  $(i, j)$  abbiamo:

$$\begin{cases} x_{ij} \geq 0, & c_{ij} + \pi_i - \pi_j - \mu_{ij} \geq 0, & (c_{ij} + \pi_i - \pi_j - \mu_{ij})x_{ij} = 0, \\ x_{ij} \leq u_{ij}, & \mu_{ij} \leq 0 & \mu_{ij}(u_{ij} - x_{ij}) = 0. \end{cases}$$

### 6.3 FLUSSI E POTENZIALI DI BASE

Quindi per ogni arco  $(i, j)$  si ha:

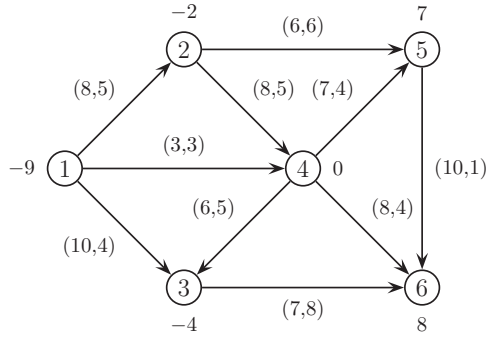
se  $x_{ij} = 0$ , allora  $u_{ij} - x_{ij} > 0$  e quindi  $\mu_{ij} = 0$  e  $c_{ij}^\pi = c_{ij} + \pi_i - \pi_j \geq 0$ ,  
 se  $0 < x_{ij} < u_{ij}$ , allora  $\mu_{ij} = 0$  e  $c_{ij}^\pi = c_{ij} + \pi_i - \pi_j = 0$ ,  
 se  $x_{ij} = u_{ij}$ , allora  $x_{ij} > 0$  e quindi  $c_{ij}^\pi = c_{ij} + \pi_i - \pi_j = \mu_{ij} \leq 0$ .

oppure, in modo equivalente, si ha:

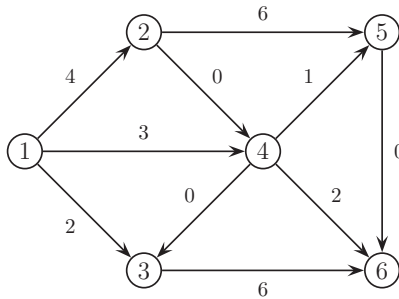
se  $c_{ij}^\pi > 0$ , allora  $c_{ij}^\pi - \mu_{ij} > 0$  e quindi  $x_{ij} = 0$ ,  
 se  $c_{ij}^\pi < 0$ , allora  $\mu_{ij} = c_{ij}^\pi < 0$  e quindi  $x_{ij} = u_{ij}$ .

□

**Esempio 6.3.2.** Sia dato un problema di flusso di costo minimo sul seguente grafo in cui su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, in ordine, il costo e la capacità:



Vogliamo stabilire se il seguente flusso ammissibile sia ottimo oppure no:



## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

Per il Teorema 6.3.5, tale flusso è ottimo se e solo se esiste un potenziale  $\pi$  tale che il costo ridotto degli archi vuoti sia  $\geq 0$ , quello degli archi saturi sia  $\leq 0$  e quello dei rimanenti archi sia nullo. Partiamo dagli archi che non sono né vuoti né saturi e ricaviamo i valori dei potenziali ai nodi:

$$\begin{aligned} c_{13}^\pi &= 10 + 0 - \pi_3 = 0 \implies \pi_3 = 10 \\ c_{36}^\pi &= 7 + 10 - \pi_6 = 0 \implies \pi_6 = 17 \\ c_{46}^\pi &= 8 + \pi_4 - 17 = 0 \implies \pi_4 = 9 \\ c_{45}^\pi &= 7 + 9 - \pi_5 = 0 \implies \pi_5 = 16 \\ c_{12}^\pi &= 8 + 0 - \pi_2 = 0 \implies \pi_2 = 8 \end{aligned}$$

abbiamo quindi trovato il vettore di potenziali  $\pi = (0, 8, 10, 9, 16, 17)$ . Verifichiamo le condizioni sui costi ridotti degli archi vuoti e di quelli saturi:

$$\begin{aligned} x_{24} &= 0, & c_{24}^\pi &= 8 + 8 - 9 = 7 > 0 \\ x_{43} &= 0, & c_{43}^\pi &= 6 + 9 - 10 = 5 > 0 \\ x_{56} &= 0, & c_{56}^\pi &= 10 + 16 - 17 = 9 > 0 \\ x_{14} &= u_{14}, & c_{14}^\pi &= 3 + 0 - 9 = -6 < 0 \\ x_{25} &= u_{25}, & c_{25}^\pi &= 6 + 8 - 16 = -2 < 0 \end{aligned}$$

Poiché le condizioni sui costi ridotti sono tutte verificate, possiamo concludere che il flusso è ottimo.

Consideriamo ora il potenziale  $\pi = (0, 1, 10, 9, 7, 17)$  e vogliamo stabilire se esso sia ottimo oppure no. Per il Teorema 6.3.5, tale potenziale è ottimo se e solo se esiste un flusso ammissibile tale che gli archi con costo ridotto positivo siano vuoti e quelli con costo ridotto negativo siano saturi. Calcoliamo i costi ridotti degli archi:

$$\begin{aligned} c_{12}^\pi &= 8 + 0 - 1 = 7 > 0 \\ c_{13}^\pi &= 10 + 0 - 10 = 0 \\ c_{14}^\pi &= 3 + 0 - 9 = -6 < 0 \\ c_{24}^\pi &= 8 + 1 - 9 = 0 \\ c_{25}^\pi &= 6 + 1 - 7 = 0 \\ c_{36}^\pi &= 7 + 10 - 17 = 0 \\ c_{43}^\pi &= 6 + 9 - 10 = 5 > 0 \\ c_{45}^\pi &= 7 + 9 - 7 = 9 > 0 \\ c_{46}^\pi &= 8 + 9 - 17 = 0 \\ c_{56}^\pi &= 10 + 7 - 17 = 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che l'arco (1,2) ha costo ridotto positivo, per cui si deve avere  $x_{12} = 0$ , inoltre l'arco (1,4) ha costo ridotto negativo, quindi  $x_{14} = u_{14} = 3$ . Per soddisfare il bilancio uguale a  $-9$  del nodo 1 è necessario che  $x_{13} = 6$ , ma in questo modo viene violata la capacità superiore 4 dell'arco (1,3). Pertanto non esiste un flusso ammissibile con la proprietà cercata e quindi il potenziale  $\pi = (0, 1, 10, 9, 7, 17)$  non è ottimo.  $\square$

## 6.4 Algoritmo del simplesso per flussi

La dimostrazione del fatto che in un problema di flusso di costo minimo il vincolo di interezza può essere rimosso a prescindere dal tipo di variabile (divisibile o indivisibile) che stiamo considerando è fondamentale ed inoltre ha consentito di rendere tali problemi equivalenti ad un problema di PL. Scopo di questo paragrafo è far vedere che l'algoritmo del simplesso ha in tali problemi delle specifiche interessanti dal punto di vista teorico ma ancor di più dal punto di vista computazionale.

### Algoritmo del simplesso per flussi

1. Trova una tripartizione degli archi  $(T, L, U)$ , con  $T$  un albero di copertura, che generi un flusso di base ammissibile.
2. Calcola il flusso di base  $\bar{x}$ :

$$\bar{x}_T := E_T^{-1} (b - E_U u_U), \quad \bar{x}_L := 0, \quad \bar{x}_U := u_U,$$

ed il potenziale di base  $\bar{\pi}^T := c_T^T E_T^{-1}$ . Indica con  $c_{ij}^{\bar{\pi}} := c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j$  il costo ridotto di ogni arco  $(i, j)$ .

3. **if** le condizioni di Bellman sono soddisfatte, cioè:

$$\begin{aligned} c_{ij}^{\bar{\pi}} &\geq 0 && \text{per ogni } (i, j) \in L, \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} &\leq 0 && \text{per ogni } (i, j) \in U, \end{aligned}$$

**then** STOP ( $\bar{x}$  è un flusso ottimo e  $\bar{\pi}$  è un potenziale ottimo).

**else** calcola l'arco entrante

$$(p, q) := \min \left( \{(i, j) \in L : c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0\} \cup \{(i, j) \in U : c_{ij}^{\bar{\pi}} > 0\} \right)$$

dove il minimo è fatto rispetto all'ordine lessicografico sugli archi. L'arco  $(p, q)$  forma un ciclo  $\mathcal{C}$  con gli archi di  $T$ . Fissa su  $\mathcal{C}$  un verso concorde con  $(p, q)$ , se  $(p, q) \in L$ , oppure un verso discorde con  $(p, q)$ , se  $(p, q) \in U$ . Indica con  $\mathcal{C}^+$  gli archi del ciclo concordi con il verso fissato e con  $\mathcal{C}^-$  quelli discordi.

4. Calcola

$$\begin{aligned} \vartheta^+ &:= \min\{u_{ij} - \bar{x}_{ij} : (i, j) \in \mathcal{C}^+\} \\ \vartheta^- &:= \min\{\bar{x}_{ij} : (i, j) \in \mathcal{C}^-\} \\ \vartheta &:= \min\{\vartheta^+, \vartheta^-\} \end{aligned}$$

**if**  $\vartheta = +\infty$  **then** STOP (il flusso di costo ottimo ha valore  $-\infty$ ).

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

**else** trova l'arco uscente

$$(r, s) := \min \left( \{(i, j) \in \mathcal{C}^+ : u_{ij} - \bar{x}_{ij} = \vartheta\} \cup \{(i, j) \in \mathcal{C}^- : \bar{x}_{ij} = \vartheta\} \right),$$

dove il minimo è sempre fatto rispetto all'ordine lessicografico sugli archi.

5. aggiorna la tripartizione:

**if**  $(p, q) \in L$  **then**

**if**  $(r, s) \in \mathcal{C}^+$  **then**

**if**  $(p, q) = (r, s)$  **then**  $L := L \setminus \{(p, q)\}$ ,  $U := U \cup \{(p, q)\}$

**else**  $T := T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}$ ,  $L := L \setminus \{(p, q)\}$ ,  $U := U \cup \{(r, s)\}$

**else**  $T := T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}$ ,  $L := L \setminus \{(p, q)\} \cup \{(r, s)\}$

**else**

**if**  $(r, s) \in \mathcal{C}^-$  **then**

**if**  $(p, q) = (r, s)$  **then**  $L := L \cup \{(p, q)\}$ ,  $U := U \setminus \{(p, q)\}$

**else**  $T := T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}$ ,  $L := L \cup \{(r, s)\}$ ,  $U := U \setminus \{(p, q)\}$

**else**  $T := T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}$ ,  $U := U \setminus \{(p, q)\} \cup \{(r, s)\}$

Torna al passo 2.

Dopo aver calcolato il flusso ed il potenziale di base, al passo 3 si controllano le condizioni di Bellman, ossia l'ammissibilità dei potenziali. Se sono soddisfatte, allora per il Teorema 6.3.3 il flusso  $\bar{x}$  è ottimo, altrimenti si opera un cambio di base, scegliendo come arco entrante in base il primo (secondo l'ordine lessicografico) che viola queste condizioni.

L'arco entrante  $(p, q)$ , che sta in  $L$  o in  $U$ , determina un ciclo  $\mathcal{C}$  con gli archi dell'albero  $T$ . Consideriamo un flusso ottenuto da  $\bar{x}$  spedendo flusso sul ciclo  $\mathcal{C}$ . Se l'arco  $(p, q) \in L$ , cioè  $\bar{x}_{pq} = 0$ , il flusso su  $(p, q)$  può solo aumentare e quindi fissiamo su  $\mathcal{C}$  un verso concorde con  $(p, q)$ . Per lo stesso motivo fissiamo un verso discorde con  $(p, q)$  se  $(p, q) \in U$ , perché in tal caso l'arco è saturo. L'equazione della semiretta (3.6) del sempliceo duale assume in questo caso la seguente forma:

$$x_{ij}(\lambda) = \begin{cases} \bar{x}_{ij} + \lambda & \text{se } (i, j) \in \mathcal{C}^+ \\ \bar{x}_{ij} - \lambda & \text{se } (i, j) \in \mathcal{C}^- \\ \bar{x}_{ij} & \text{se } (i, j) \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

Poiché gli archi del ciclo sono tutti in  $T$  tranne  $(p, q)$  ed inoltre  $\bar{\pi}^\top E_T = c_T^\top$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} c^\top x(\lambda) &= c^\top \bar{x} + \lambda \left[ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}^+} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}^-} c_{ij} \right] \\ &= \begin{cases} c^\top \bar{x} + \lambda (c_{pq} + \bar{\pi}_p - \bar{\pi}_q) & \text{se } (p, q) \in L \\ c^\top \bar{x} + \lambda (-c_{pq} - \bar{\pi}_p + \bar{\pi}_q) & \text{se } (p, q) \in U \end{cases} \end{aligned}$$



#### 6.4 ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSI

Questo significa che il costo del ciclo  $\mathcal{C}$  è uguale al costo ridotto  $c_{pq}^{\bar{\pi}}$  se  $(p, q) \in L$  oppure al suo opposto se  $(p, q) \in U$ . In entrambi i casi si ottiene che il costo di  $\mathcal{C}$  è negativo e quindi

$$c^T x(\lambda) < c^T \bar{x} \quad \text{per ogni } \lambda > 0,$$

ossia spedire  $\lambda$  unità di flusso lungo il ciclo  $\mathcal{C}$  fa diminuire il costo del flusso.

È importante osservare che il flusso  $x(\lambda)$  rispetta i bilanci ai nodi perché differisce da  $\bar{x}$  solo per il flusso  $\lambda$  spedito lungo il ciclo  $\mathcal{C}$ .

Affinché  $x(\lambda)$  sia ammissibile bisogna imporre  $0 \leq x(\lambda) \leq u$  ovvero

$$0 \leq \lambda \leq \vartheta = \min\{\vartheta^+, \vartheta^-\},$$

dove

$$\begin{aligned} \vartheta^+ &= \min\{u_{ij} - \bar{x}_{ij} : (i, j) \in \mathcal{C}^+\} \\ \vartheta^- &= \min\{\bar{x}_{ij} : (i, j) \in \mathcal{C}^-\}. \end{aligned}$$

Per ottenere un nuovo flusso di base scegliamo  $\lambda = \vartheta$ .

Nel caso in cui  $\vartheta = \vartheta^+$  un arco  $(r, s)$  di  $T$  o lo stesso arco  $(p, q) \in L$  si satura e va in  $U$ , mentre se  $\vartheta = \vartheta^-$ , un arco  $(r, s)$  di  $T$  o lo stesso arco  $(p, q) \in U$  si vuota e va in  $L$ . Nel caso in cui  $\vartheta^+ = \vartheta^-$  l'arco uscente si sceglie seguendo la regola anticiclo di Bland, ossia trovando il minimo secondo l'ordine lessicografico.

Quando  $\vartheta = 0$  significa che siamo in un flusso di base degenere, cioè si cambia la tripartizione  $(T, L, U)$  senza cambiare il flusso  $\bar{x}$ .

Osserviamo che se non ci sono archi discordi nel ciclo  $\mathcal{C}$  e le capacità superiori di quelli concordi sono illimitate si ha che  $\vartheta = +\infty$ . In tal caso il problema di flusso è inferiormente illimitato e il problema di potenziale è vuoto. Se  $u_{ij} < +\infty$  per ogni arco  $(i, j)$ , allora il problema di flusso non può essere illimitato inferiormente.

Vediamo ora come aggiornare il potenziale di base senza risolvere il sistema  $\pi^T E_T = c_T^T$ . Se l'arco  $(r, s)$  coincide con l'arco  $(p, q)$ , ossia tale arco da vuoto diventa saturo o viceversa, allora l'albero  $T$  non viene modificato e quindi non cambia neanche il potenziale  $\pi$ . Quando invece  $(r, s) \neq (p, q)$ , l'arco  $(p, q)$  entra in  $T$  e l'arco  $(r, s)$  esce da  $T$ . La rimozione di  $(r, s)$  dall'albero  $T$  genera una partizione dell'insieme  $N$  dei nodi in due sottoinsiemi sconnessi  $N_p$  e  $N_q$  che contengono, rispettivamente, i nodi  $p$  e  $q$ . Poiché i potenziali dei nodi sono definiti a meno di una costante additiva, possiamo supporre che i potenziali dei nodi dell'insieme  $N_p$  rimangano invariati. Indichiamo con  $\bar{\pi}$  i vecchi potenziali e con  $\pi'$  i nuovi potenziali. Poiché l'arco  $(p, q)$  entra in  $T$ , il suo costo ridotto, calcolato con i nuovi potenziali, deve essere nullo:

$$0 = c_{pq} + \pi'_p - \pi'_q = c_{pq} + \bar{\pi}_p - \pi'_q,$$

e quindi

$$\pi'_q = c_{pq} + \bar{\pi}_p = \bar{\pi}_q + \bar{c}_{pq},$$

ossia il nuovo potenziale del nodo  $q$  (e quindi di tutti i nodi di  $N_q$  che sono connessi a  $q$ ) è ottenuto dal vecchio potenziale sommando il costo ridotto dell'arco entrante  $(p, q)$ .

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

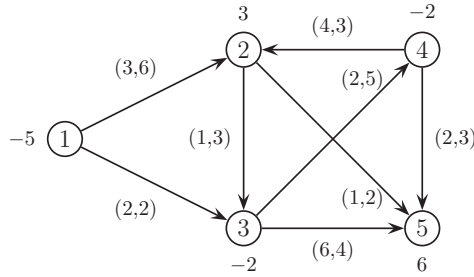
Riassumendo, il nuovo potenziale di base  $\pi'$  è dato da:

$$\pi'_i = \begin{cases} \bar{\pi}_i & \text{se } i \in N_p, \\ \bar{\pi}_i + c_{pq}^{\bar{\pi}} & \text{se } i \in N_q. \end{cases}$$

I costi ridotti degli archi che connettono due nodi di  $N_p$  non cambiano perché in  $N_p$  i potenziali sono invariati e non cambiano neanche i costi ridotti degli archi che connettono due nodi di  $N_q$  perché in  $N_q$  tutti i potenziali sono stati aumentati della stessa quantità  $c_{pq}^{\bar{\pi}}$ . Di conseguenza cambiano solo i costi ridotti degli archi che hanno un estremo in  $N_p$  e l'altro in  $N_q$ . Indicando con  $c_{ij}^{\pi'}$  i nuovi costi ridotti e con  $c_{ij}^{\bar{\pi}}$  i vecchi costi ridotti, otteniamo:

$$c_{ij}^{\pi'} = \begin{cases} c_{ij}^{\bar{\pi}} & \text{se } i, j \in N_p \text{ oppure } i, j \in N_q, \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} - c_{pq}^{\bar{\pi}} & \text{se } i \in N_p \text{ e } j \in N_q, \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} + c_{pq}^{\bar{\pi}} & \text{se } i \in N_q \text{ e } j \in N_p \end{cases}$$

**Esempio 6.4.1.** Consideriamo il flusso di costo minimo sul seguente grafo in cui sugli archi sono indicati il costo e la capacità:



**1° iterazione.** Partiamo dalla base relativa alla tripartizione

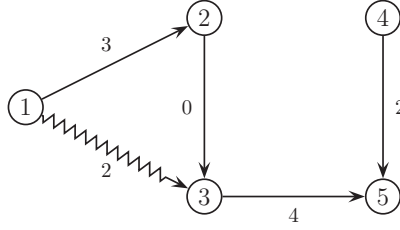
$$T = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\} \quad L = \{(2, 5), (3, 4), (4, 2)\} \quad U = \{(1, 3)\}.$$

Il corrispondente flusso di base ha gli archi di  $L$  vuoti, l'arco di  $U$  saturo, ossia  $\bar{x}_{13} = 2$ , ed i flussi sugli archi di  $T$  sono ottenuti nel seguente ordine:

$$\bar{x}_{12} = 3, \quad \bar{x}_{23} = 0, \quad \bar{x}_{35} = 4, \quad \bar{x}_{45} = 2,$$

ossia

#### 6.4 ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSI



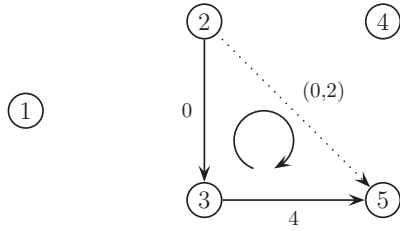
Tale flusso è degenere perché l'arco  $(2, 3) \in T$  è vuoto. I potenziali di base sono:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_1 &= 0 \\ \bar{\pi}_2 &= \bar{\pi}_1 + c_{12} = 0 + 3 = 3 \\ \bar{\pi}_3 &= \bar{\pi}_2 + c_{23} = 3 + 0 = 3 \\ \bar{\pi}_5 &= \bar{\pi}_3 + c_{35} = 3 + 4 = 7 \\ \bar{\pi}_4 &= \bar{\pi}_5 - c_{45} = 7 - 2 = 5\end{aligned}$$

Calcoliamo i costi ridotti degli archi di  $L$  ed  $U$  in ordine lessicografico:

$$\begin{aligned}(1, 3) \in U : c_{13}^{\bar{\pi}} &= 2 + 0 - 3 = -1 \\ (2, 5) \in L : c_{25}^{\bar{\pi}} &= 3 + 5 - 7 = 1 < 0,\end{aligned}$$

quindi l'arco  $(2, 5)$  viola le condizioni di Bellman. Tale arco forma con gli archi di  $T$  il seguente ciclo sul quale fissiamo un verso concorde con  $(2, 5)$  (sull'arco concorde  $(2, 5)$  indichiamo il flusso e la capacità, mentre su quelli discordi solo il flusso):



Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}\vartheta^+ &= u_{25} - \bar{x}_{25} = 2, \\ \vartheta^- &= \min \{ \bar{x}_{23}, \bar{x}_{35} \} = \min \{ 0, 4 \} = 0,\end{aligned}$$

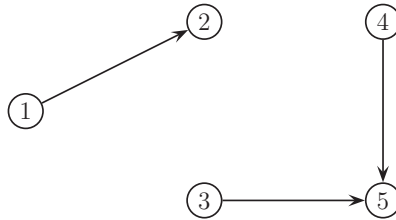
perciò  $\vartheta = \vartheta^- = 0$ , l'arco  $(2, 3)$  esce da  $T$  e va in  $L$ , mentre l'arco  $(2, 5)$  va da  $L$  in  $T$ .

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

**2° iterazione.** La nuova tripartizione è la seguente:

$$T = \{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} \quad L = \{(2, 3), (3, 4), (4, 2)\} \quad U = \{(1, 3)\}.$$

Il flusso non cambia perché  $\vartheta = 0$ . Per aggiornare i potenziali, osserviamo che la rimozione da  $T$  dell'arco  $(2, 3)$  crea due sottoinsiemi sconnessi di nodi  $\{1, 2\}$  e  $\{3, 4, 5\}$ :



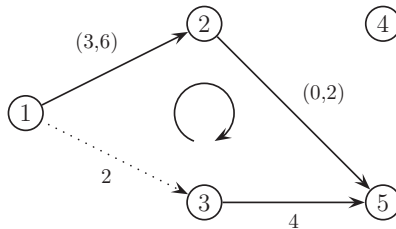
Aggiorniamo il potenziale dei nodi 3, 4 e 5 aggiungendo il costo ridotto dell'arco entrante  $(2, 5)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1 &= 0, & \bar{\pi}_2 &= 3, \\ \bar{\pi}_3 &= 4 - 6 = -2, & \bar{\pi}_4 &= 8 - 6 = 2, & \bar{\pi}_5 &= 10 - 6 = 4. \end{aligned}$$

Calcoliamo di nuovo i costi ridotti degli archi di  $L$  ed  $U$  procedendo in ordine lessicografico: poiché

$$(1, 3) \in U, \quad c_{13}^{\bar{\pi}} = 2 + 0 - (-2) = 4 > 0,$$

l'arco  $(1, 3)$  viola le condizioni di Bellman e forma con  $T$  il seguente ciclo sul quale fissiamo un verso discorde a  $(1, 3)$  (sugli archi concordi  $(1, 2)$  e  $(2, 5)$  indichiamo il flusso e la capacità, mentre su quelli discordi solo il flusso):



Quindi si ha:

$$\vartheta^+ = \min \{u_{12} - \bar{x}_{12}, u_{25} - \bar{x}_{25}\} = \min \{6 - 3, 2 - 0\} = 2,$$

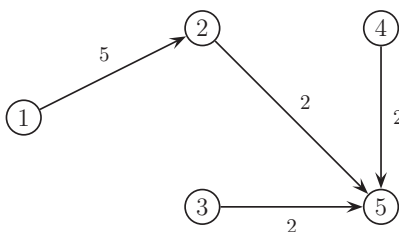
$$\vartheta^- = \min \{\bar{x}_{13}, \bar{x}_{35}\} = \min \{2, 4\} = 2,$$

pertanto  $\vartheta = \vartheta^+ = \vartheta^- = 2$  e per la regola anticiclo di Bland tra gli archi  $(1,3)$  e  $(2,5)$  scegliamo come arco uscente l'arco  $(1,3)$  che va da  $U$  in  $L$ .

**3° iterazione.** La nuova tripartizione degli archi diventa:

$$T = \{(1,2), (2,5), (3,5), (4,5)\} \quad L = \{(1,3), (2,3), (3,4), (4,2)\} \quad U = \emptyset.$$

Il nuovo flusso di base è ottenuto da quello vecchio spendendo 2 unità di flusso lungo il ciclo indicato sopra:



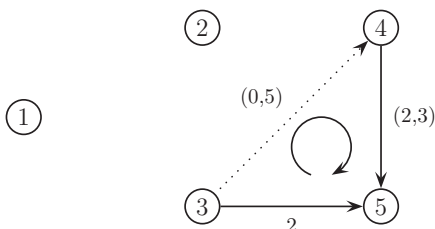
I potenziali non cambiano perché l'albero  $T$  è invariato, quindi  $\bar{\pi} = (0, 3, -2, 2, 4)$ . Calcoliamo i costi ridotti degli archi di  $L$ :

$$c_{13}^{\bar{\pi}} = 2 + 0 - (-2) = 4$$

$$c_{23}^{\bar{\pi}} = 1 + 3 - (-2) = 6$$

$$c_{34}^{\bar{\pi}} = 2 - 2 - 2 = -2 < 0$$

quindi l'arco  $(3,4)$  viola le condizioni di Bellman e forma con  $T$  il seguente ciclo sul quale fissiamo un verso concorde a  $(3,4)$  (sugli archi concordi  $(3,4)$  e  $(4,5)$  indichiamo il flusso e la capacità, mentre sugli altri solo il flusso):



## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO

Quindi si ha:

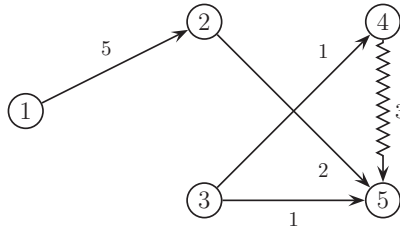
$$\begin{aligned}\vartheta^+ &= \min \{u_{34} - \bar{x}_{34}, u_{45} - \bar{x}_{45}\} = \min \{5 - 0, 3 - 2\} = 1, \\ \vartheta^- &= \bar{x}_{35} = 2,\end{aligned}$$

pertanto  $\vartheta = \vartheta^+ = 1$ , l'arco  $(4,5)$  va da  $T$  in  $U$ , mentre l'arco  $(3,4)$  va da  $L$  in  $T$ .

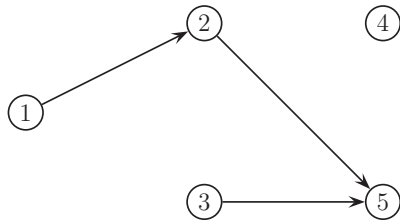
**4° iterazione.** La nuova tripartizione degli archi diventa:

$$T = \{(1,2), (2,5), (3,4), (3,5)\} \quad L = \{(1,3), (2,3), (4,2)\} \quad U = \{(4,5)\}.$$

Il nuovo flusso di base è ottenuto da quello vecchio spendendo 1 unità di flusso lungo il ciclo indicato sopra:



Per aggiornare i potenziali, osserviamo che la rimozione da  $T$  dell'arco  $(4,5)$  crea due sottoinsiemi sconnessi di nodi  $\{1, 2, 3, 5\}$  e  $\{4\}$ :



Aggiorniamo il potenziale del nodo 4 aggiungendo il costo ridotto dell'arco entrante  $(3,4)$ :

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_1 &= 0, & \bar{\pi}_2 &= 3, & \bar{\pi}_3 &= -2, & \bar{\pi}_5 &= 4, \\ \bar{\pi}_4 &= 2 - 2 = 0\end{aligned}$$

#### 6.4 ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSI

Calcoliamo di nuovo i costi ridotti degli archi di  $L$  e di  $U$ :

$$\begin{aligned}(1, 3) \in L : \quad c_{13}^{\bar{\pi}} &= 2 - (-2) = 4 \\(2, 3) \in L : \quad c_{23}^{\bar{\pi}} &= 1 + 3 - (-2) = 6 \\(4, 2) \in L : \quad c_{42}^{\bar{\pi}} &= 4 + 0 - 3 = 1 \\(4, 5) \in U : \quad c_{45}^{\bar{\pi}} &= 2 + 0 - 4 = -2\end{aligned}$$

Poiché sono soddisfatte le condizioni di Bellman, il flusso di base corrente è ottimo.

□

Nel caso capacitato il problema ausiliario assume la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{i \in N} \varepsilon_i & \\ E_i x + \varepsilon_i = b_i & \text{se } b_i \geq 0 \\ E_i x - \varepsilon_i = b_i & \text{se } b_i < 0 \\ 0 \leq x \leq u & \\ \varepsilon \geq 0 & \end{array} \right.$$

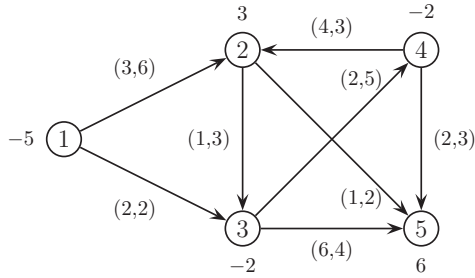
dove  $\varepsilon_i$  sono le variabili ausiliarie, una per ogni nodo  $i \in N$ , ed  $E_i$  sono le righe della matrice di incidenza  $E$ . Tale problema ausiliario si può interpretare come un flusso di costo minimo su un grafo i cui nodi sono i nodi di  $N$  più un nodo ausiliario 0 (con bilancio nullo) ed i cui archi sono gli archi di  $A$  più gli archi ausiliari che vanno dai nodi  $i$  con bilancio  $b_i < 0$  al nodo 0 e dal nodo 0 ai nodi  $i$  con  $b_i \geq 0$ . Gli archi ausiliari hanno costo 1 e capacità  $+\infty$ , mentre i costi degli archi di  $A$  sono nulli perché il flusso  $x$  non compare nella funzione obiettivo del problema ausiliario. È facile osservare che la seguente tripartizione:

$$T = \{\text{archi ausiliari}\} \quad L = \{\text{archi di } A\} \quad U = \emptyset,$$

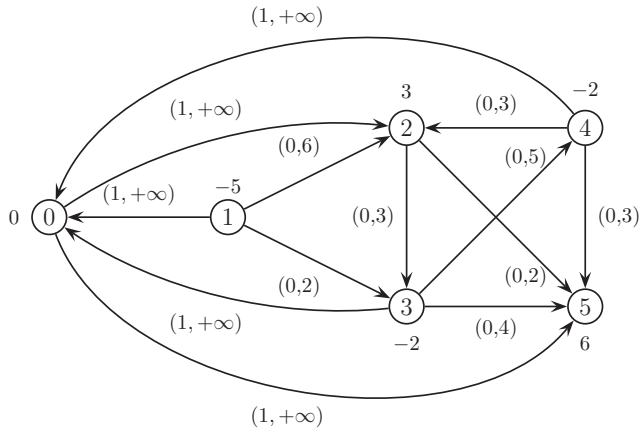
fornisce un flusso di base ammissibile per il problema ausiliario. È possibile quindi applicare il simpleso per flussi al problema ausiliario partendo da questa tripartizione ammissibile. Se il valore ottimo del problema ausiliario è positivo, cioè è necessario usare almeno un arco ausiliario per soddisfare i bilanci dei nodi, allora non esiste un flusso ammissibile sul grafo originario  $(N, A)$ . Se invece il problema ausiliario ha valore ottimo nullo, allora il flusso ottimo del problema ausiliario è ammissibile per il problema originario e si può ricavare una tripartizione ammissibile  $(T, L, U)$  per il problema originario.

**Esempio 6.4.2.** Consideriamo il flusso di costo minimo dell'Esempio 6.4.1:

## 6. FLUSSO DI COSTO MINIMO



Il problema ausiliario è il flusso di costo minimo sul seguente grafo:



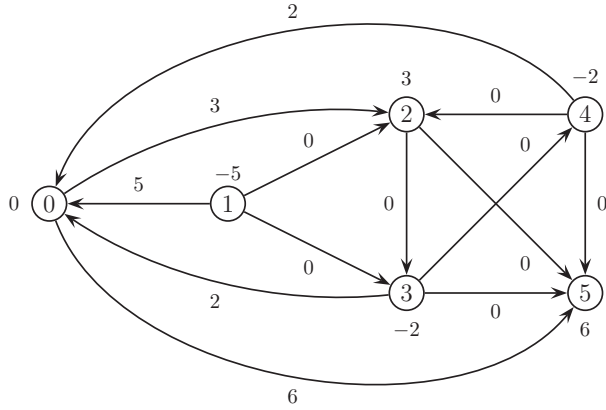
La tripartizione

$$\begin{aligned} T &= \{(0, 2), (0, 5), (1, 0), (3, 0), (4, 0)\} \\ L &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\} \\ U &= \emptyset \end{aligned}$$

fornisce il seguente flusso di base ammissibile:



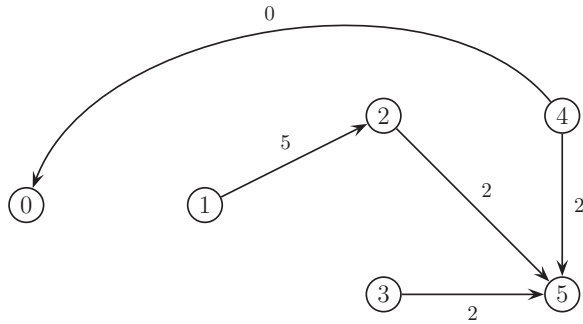
## 6.4 ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSI



Applichiamo il semplice per flussi al problema ausiliario a partire da tale flusso di base ammissibile e otteniamo la tripartizione ottima:

$$\begin{aligned} T &= \{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 0), (4, 5)\} \\ L &= \{(0, 2), (0, 5), (1, 0), (3, 0), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\} \\ U &= \emptyset \end{aligned}$$

con il relativo flusso ottimo:



Il valore ottimo del problema ausiliario è 0 e quindi il flusso precedente è ammissibile per il problema iniziale e corrisponde alla tripartizione ammissibile:

$$T = \{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} \quad L = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\} \quad U = \emptyset.$$

Da questa tripartizione si può partire con il semplice per flussi per risolvere il problema iniziale.  $\square$



# Capitolo 7

## Cammini minimi

Consideriamo un grafo  $(N, A)$  in cui ad ogni arco  $(i, j)$  sia associato un costo  $c_{ij}$  (non necessariamente positivo). Il costo di un cammino orientato è definito come la somma dei costi degli archi da cui esso è formato. Il problema dei cammini minimi di radice  $r$  consiste nel determinare, se esiste, un cammino orientato di costo minimo dal nodo  $r$  verso ogni altro nodo del grafo (problema illustrato nel paragrafo 5.3). Senza perdita di generalità possiamo supporre che per ogni nodo  $i \neq r$  esista un cammino orientato da  $r$  a  $i$ , a meno di aggiungere archi fittizi  $(r, i)$  di costo  $+\infty$ .

Osserviamo che alcuni cammini minimi potrebbero non esistere qualora nel grafo ci fosse un ciclo orientato di costo negativo. In tal caso i cammini dal nodo  $r$  verso i nodi del ciclo hanno un costo che tende a  $-\infty$ .

Abbiamo visto nel paragrafo 5.3 che tale problema può essere formulato come un problema di flusso di costo minimo

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & E x = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -(n-1) & \text{se } i = r, \\ 1 & \text{se } i \neq r. \end{cases} \quad (7.1)$$

Ciò equivale a supporre che  $n-1$  unità di flusso si debbano dirigere dal nodo  $r$  ognuna verso un nodo  $i \neq r$  minimizzando il costo complessivo  $c^T x$ .

In questo caso non abbiamo capacità superiori sugli archi, per cui  $B$  è una base se e solo se rappresenta un albero di copertura del grafo. Inoltre  $B$  è una base ammissibile se e solo se rappresenta un albero di copertura orientato di radice  $r$ , ossia contiene un cammino orientato da  $r$  verso ogni altro nodo  $i \neq r$ .

Consideriamo ora un albero di copertura  $T_r$  orientato di radice  $r$ . Possiamo osservare che il flusso di base associato a  $T_r$  è non degenere, cioè ogni arco di  $T_r$  ha flusso diverso da zero, perché i bilanci dei nodi sono tutti uguali a 1 (tranne quello della radice  $r$ ). Inoltre il vettore  $\pi$  dei potenziali di base associati a  $T_r$  è tale che

$$\pi_j - \pi_i = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in T_r,$$

per cui  $\pi_i$  rappresenta il costo del cammino orientato da  $r$  a  $i$  contenuto nell'albero  $T_r$ .

## 7. CAMMINI MINIMI

Poiché i flussi di base ammissibili sono non degeneri, le condizioni di Bellman sono necessarie e sufficienti per l'ottimalità.

**Teorema 7.0.1.** (Condizioni di ottimalità)

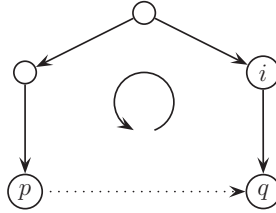
Sia  $T_r$  un albero di copertura orientato di radice  $r$  e  $\pi$  il vettore dei potenziali associati a  $T_r$ . Allora  $T_r$  è un albero dei cammini minimi se e solo se  $T_r$  verifica le condizioni di Bellman:

$$c_{ij}^\pi = c_{ij} + \pi_i - \pi_j \geq 0 \quad \forall (i, j) \notin T_r.$$

### 7.1 Algoritmo del simplesso per cammini

Il Teorema 7.0.1 e le osservazioni precedenti ci consentono di stabilire che l'algoritmo del simplesso per flussi diventa un simplesso per cammini con le seguenti semplificazioni.

- Non ci sono capacità superiori:  $u = +\infty$ .
- Le basi ammissibili corrispondono agli alberi orientati di radice  $r$ .
- Non sono necessarie regole anticiclo perché non ci sono soluzioni di base degeneri, quindi possiamo scegliere come arco entrante in base un qualunque arco che violi le condizioni di Bellman (in particolare quello che ha il costo ridotto più grande in valore assoluto).
- Se  $(p, q)$  è l'arco entrante in base, allora l'arco uscente dalla base è l'unico arco che entra nel nodo  $q$ , diciamo  $(i, q)$  (tale arco è unico perché  $T_r$  è un albero), perché tra gli archi discordi al verso del ciclo formato,  $(i, q)$  è quello di flusso minimo e quindi non è necessario calcolare il flusso di base per determinare l'arco uscente.



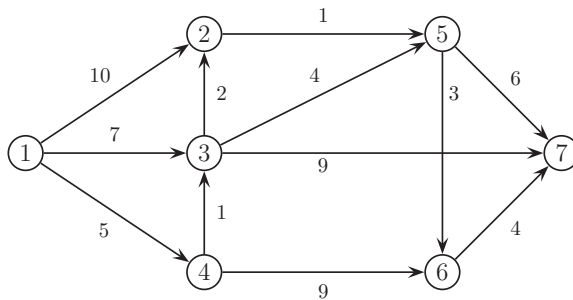
- L'uscita di un arco dalla base sconnette l'insieme  $N$  dei nodi generando una partizione dei nodi  $(N_1, N_2)$ , dove  $N_1$  e  $N_2$  sono le due componenti connesse e  $r \in N_1$ . I potenziali si aggiornano solo sui nodi appartenenti a  $N_2$ . I costi ridotti si aggiornano solo sugli archi che hanno un estremo in  $N_1$  e l'altro in  $N_2$ .

L'algoritmo del simplesso per il problema dei cammini minimi è schematizzato nel modo seguente.

Algoritmo del simpleso per cammini

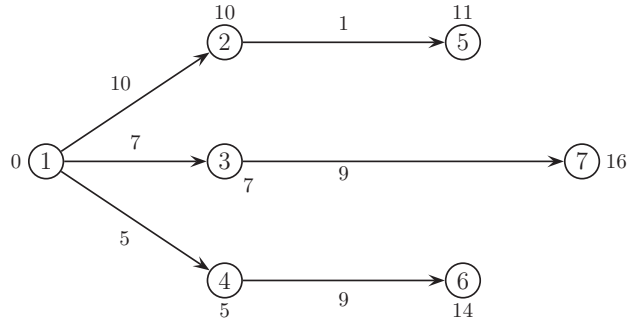
1. Trova un albero  $T$  orientato di radice  $r$ .
2. Calcola il potenziale di base  $\bar{\pi}^T := c_T^T E_T^{-1}$ . Indica con  $c_{ij}^{\bar{\pi}} := c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j$  il costo ridotto di ogni arco  $(i, j)$ .
3. **if**  $c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0$  per ogni  $(i, j) \notin T$   
     **then** STOP ( $T$  è un albero dei cammini minimi).  
     **else** scegli come arco entrante un arco  $(p, q)$  tale che  $c_{pq}^{\bar{\pi}} < 0$ . L'arco  $(p, q)$  forma un ciclo  $\mathcal{C}$  con gli archi di  $T$ .
4. **if** tutti gli archi di  $\mathcal{C}$  sono concordi con  $(p, q)$   
     **then** STOP (l'albero dei cammini minimi non esiste e  $\mathcal{C}$  è un ciclo di costo negativo).  
     **else** scegli come arco uscente l'unico arco  $(i, q) \in T$  che entra nel nodo  $q$ .
5. Aggiorna l'albero:  
     
$$T = T \setminus \{(i, q)\} \cup \{(p, q)\},$$
     e torna al passo 2.

**Esempio 7.1.1.** Applichiamo il simpleso per cammini per trovare l'albero dei cammini minimi sul seguente grafo:



**1° iterazione.** Partiamo dalla seguente base (albero) ammissibile (sugli archi indichiamo i costi e sui nodi i potenziali):

## 7. CAMMINI MINIMI

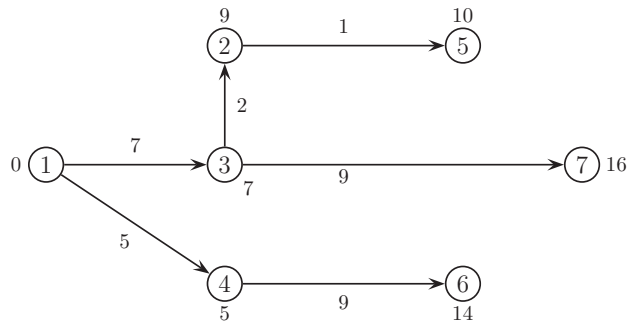


Calcoliamo i costi ridotti degli archi:

$$c_{32}^{\pi} = 2 + 7 - 10 = -1,$$

quindi l'arco (3,2) entra in base ed esce l'arco (1,2).

**2° iterazione.** La nuova base è la seguente:



Calcoliamo i costi ridotti degli archi:

$$c_{12}^{\pi} = 10 + 0 - 9 = 1$$

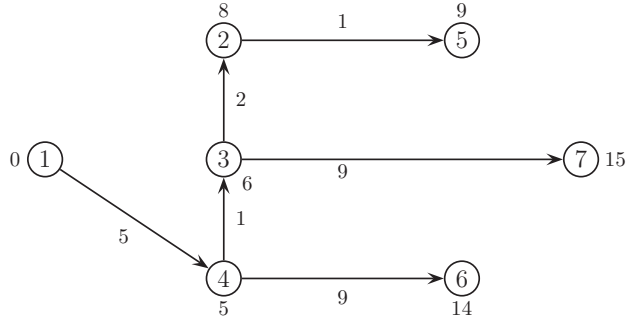
$$c_{35}^{\pi} = 4 + 7 - 10 = 1$$

$$c_{43}^{\pi} = 1 + 5 - 7 = -1$$

quindi l'arco  $(4,3)$  entra in base ed esce l'arco  $(1,3)$ .

**3° iterazione.** La nuova base è la seguente:

## 7.1 ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER CAMMINI

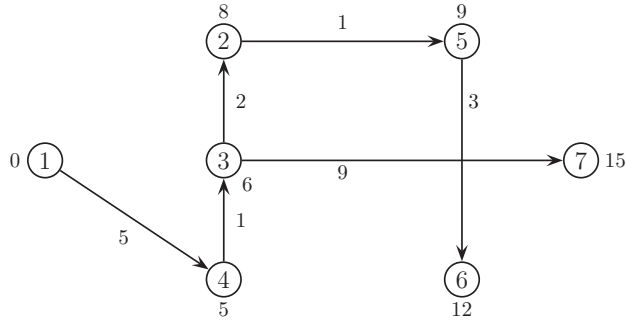


Calcoliamo i costi ridotti degli archi:

$$\begin{aligned}
 c_{12}^{\pi} &= 10 + 0 - 8 = 2 \\
 c_{13}^{\pi} &= 7 + 0 - 6 = 1 \\
 c_{35}^{\pi} &= 4 + 6 - 9 = 1 \\
 c_{56}^{\pi} &= 3 + 9 - 14 = -2
 \end{aligned}$$

quindi l'arco (5,6) entra in base ed esce l'arco (4,6).

**4° iterazione.** La nuova base è la seguente:



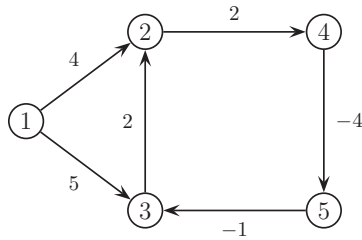
Calcoliamo i costi ridotti degli archi:

$$\begin{aligned}
 c_{12}^{\pi} &= 10 + 0 - 8 = 2 \\
 c_{13}^{\pi} &= 7 + 0 - 6 = 1 \\
 c_{35}^{\pi} &= 4 + 6 - 9 = 1 \\
 c_{46}^{\pi} &= 9 + 5 - 12 = 2 \\
 c_{56}^{\pi} &= 6 + 9 - 15 = 0 \\
 c_{67}^{\pi} &= 4 + 12 - 15 = 1
 \end{aligned}$$

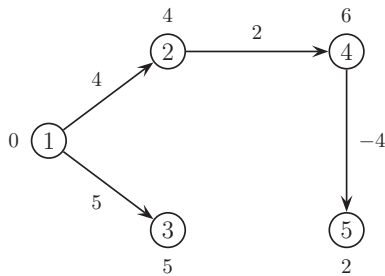
Poiché i costi ridotti sono non negativi, abbiamo trovato un albero dei cammini minimi.

□

**Esempio 7.1.2.** Applichiamo il semplice per cammini per trovare, se esiste, l'albero dei cammini minimi di radice 1 sul seguente grafo con costi sia positivi che negativi:



**1° iterazione.** Partiamo con il seguente albero orientato di radice 1 ed indichiamo sui nodi i potenziali di base:



Calcoliamo i costi ridotti degli archi non in base:

$$c_{32}^{\pi} = 2 + 5 - 4 = 3$$

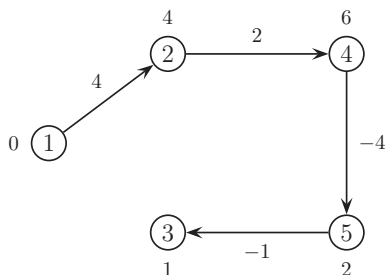
$$c_{53}^{\pi} = -1 + 2 - 5 = -4$$

L'arco (5,3) entra in base, mentre l'arco uscente è (1,3).

**2° iterazione.** La nuova base ed i nuovi potenziali sono i seguenti:



## 7.2 ALGORITMO DI DIJKSTRA

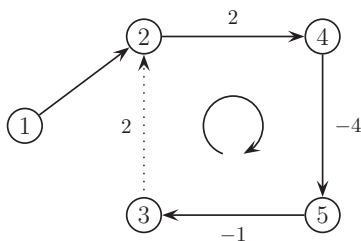


Calcoliamo i costi ridotti degli archi non in base:

$$c_{13}^{\pi} = 5 + 0 - 1 = 4$$

$$c_{32}^{\pi} = 2 + 1 - 4 = -1$$

L'arco (3,2) entra in base e forma un ciclo con tutti gli archi concordi a (3,2):



Quindi l'albero dei cammini minimi non esiste perché il ciclo 2-4-5-3-2 ha costo negativo uguale a  $2 - 4 - 1 + 2 = -1$ .

□

## 7.2 Algoritmo di Dijkstra

Il problema dei cammini minimi per la sua rilevanza in vari campi è stato oggetto di studi specifici. Sono così nati algoritmi specifici per risolvere tale problema, il più famoso dei quali è l'algoritmo di Dijkstra che trova un albero dei cammini minimi in un grafo in cui i costi degli archi sono non negativi.

Ad ogni iterazione l'algoritmo mantiene un albero di copertura orientato di radice  $r$  (memorizzato in un vettore  $p$  di predecessori dei nodi) ed un vettore  $\pi$  di etichette ai nodi,

## 7. CAMMINI MINIMI

con la proprietà che  $\pi_i$  rappresenta il costo del cammino da  $r$  a  $i$  contenuto nell'albero, ossia  $\pi$  è il potenziale di base corrispondente all'albero. Inizialmente l'albero è formato da archi fittizi  $(r, i)$  per ogni  $i \neq r$ , che collegano la radice  $r$  a tutti i nodi con costo  $c_{ri} = +\infty$  ed il vettore  $p$  dei predecessori è definito come:

$$p_i = \begin{cases} -1 & i \neq r, \\ 0 & i = r. \end{cases}$$

mentre le corrispondenti etichette sono:

$$\pi_i = \begin{cases} +\infty & i \neq r, \\ 0 & i = r. \end{cases}$$

Ad ogni iterazione si cercano gli archi che violano le condizioni di Bellman e si cambiano l'albero e le corrispondenti etichette in modo da soddisfare tali condizioni. L'algoritmo mantiene anche un insieme  $U$  di nodi le cui stelle uscenti (cioè gli archi uscenti dai nodi) contengono gli archi che potenzialmente possono violare le condizioni di Bellman. Inizialmente  $U$  contiene tutti i nodi del grafo. Ad ogni iterazione si estrae da  $U$  un nodo  $u$  con etichetta minima e si controlla la stella uscente da  $u$ . Se un arco  $(u, v)$  viola le condizioni di Bellman, cioè  $\pi_v > \pi_u + c_{uv}$ , significa che il cammino da  $r$  a  $v$  contenuto nell'albero ha un costo  $\pi_v$  maggiore del cammino ottenuto unendo il cammino da  $r$  a  $u$ , contenuto nell'albero, e l'arco  $(u, v)$ . Quindi l'albero viene modificato assegnando il nodo  $u$  come predecessore del nodo  $v$  e modificando l'etichetta del nodo  $v$  in modo corrispondente, ossia  $\pi_v = \pi_u + c_{uv}$ . L'algoritmo termina quando  $U = \emptyset$ .

### Algoritmo di Dijkstra

Poni  $U := N$ ,  $\pi_i := \begin{cases} +\infty & \text{se } i \neq r, \\ 0 & \text{se } i = r, \end{cases}$ ,  $p_i = \begin{cases} -1 & \text{se } i \neq r, \\ 0 & \text{se } i = r. \end{cases}$

**while**  $U \neq \emptyset$  **do**

    Estrai da  $U$  un nodo  $u$  con etichetta  $\pi_u$  minima.

    Per ogni arco  $(u, v)$  uscente da  $u$ :

**if**  $\pi_v > \pi_u + c_{uv}$  **then**  $p_v := u$ ,  $\pi_v := \pi_u + c_{uv}$ .

**Teorema 7.2.1.** *Se  $c_{ij} \geq 0$  per ogni arco  $(i, j)$ , allora l'algoritmo di Dijkstra trova un albero dei cammini minimi dopo  $n$  iterazioni.*

**Dimostrazione.** Dalle regole con cui si modificano il vettore  $p$  dei predecessori ed il vettore  $\pi$  di etichette dei nodi, segue che ogni etichetta  $\pi_i$  rappresenta il costo del cammino da  $r$  a  $i$  contenuto nell'albero rappresentato dal vettore  $p$ .

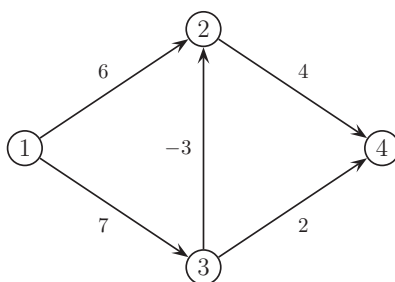
È facile osservare che durante l'algoritmo le etichette dei nodi non possono aumentare di valore. Consideriamo ora un nodo  $u$  che viene estratto dall'insieme  $U$ . Essendo il nodo con

## 7.2 ALGORITMO DI DIJKSTRA

etichetta minima tra quelli appartenenti a  $U$ , tutti gli altri nodi di  $U$  hanno un'etichetta maggiore o uguale a  $\pi_u$ . Poiché abbiamo supposto i costi  $c_{uv} \geq 0$ , i nodi estratti successivamente da  $U$  avranno un'etichetta maggiore o uguale a  $\pi_u$ . Quindi l'etichetta del nodo  $u$  non potrà più cambiare. Inoltre dopo che è stata analizzata la stella uscente dal nodo  $u$ , tutti gli archi  $(u, v)$  soddisfano le condizioni di Bellman. Poiché le etichette  $\pi_v$  possono solo diminuire, allora anche successivamente gli archi  $(u, v)$  dovranno soddisfare le condizioni di Bellman.

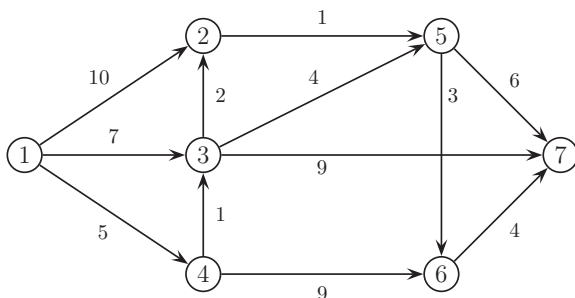
Poiché ad ogni iterazione viene estratto un nodo da  $U$ , l'algoritmo termina dopo  $n$  iterazioni. Alla fine dell'esecuzione dell'algoritmo tutti i nodi del grafo sono stati estratti da  $u$  e quindi tutti gli archi del grafo soddisfano le condizioni di Bellman, cioè il vettore  $p$  fornisce un albero dei cammini minimi.  $\square$

**Osservazione 7.2.1.** Se nel grafo esistono archi di costo negativo, non è garantito che l'algoritmo di Dijkstra trovi un albero dei cammini minimi. Consideriamo infatti il seguente grafo:



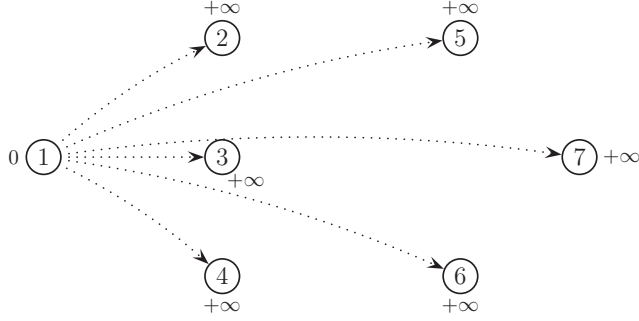
Applicando l'algoritmo di Dijkstra troviamo  $p = (0, 3, 1, 3)$  e  $\pi = (0, 4, 7, 9)$ , tuttavia il cammino di costo minimo da 1 a 4 è 1-3-2-4 di costo 8.  $\square$

**Esempio 7.2.1.** Applichiamo l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sullo stesso grafo dell'Esempio 7.1.1:



## 7. CAMMINI MINIMI

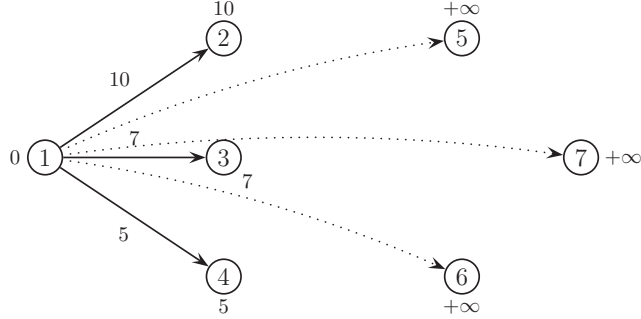
Inizializziamo l'insieme  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . L'albero iniziale è formato da tutti archi fittizi dalla radice 1 verso tutti gli altri nodi con costo  $+\infty$ . Rappresentiamo tale albero e le relative etichette ai nodi:



**1° iterazione.** Si estrae da  $U$  il nodo 1 e si esamina la stella uscente da 1, cioè gli archi  $(1,2)$ ,  $(1,3)$  e  $(1,4)$ :

$$\begin{aligned} (1,2): \quad +\infty = \pi_2 > \pi_1 + c_{12} = 10 &\implies p_2 = 1, \quad \pi_2 = 10, \\ (1,3): \quad +\infty = \pi_3 > \pi_1 + c_{13} = 7 &\implies p_3 = 1, \quad \pi_3 = 7, \\ (1,4): \quad +\infty = \pi_4 > \pi_1 + c_{14} = 5 &\implies p_4 = 1, \quad \pi_4 = 5, \end{aligned}$$

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:

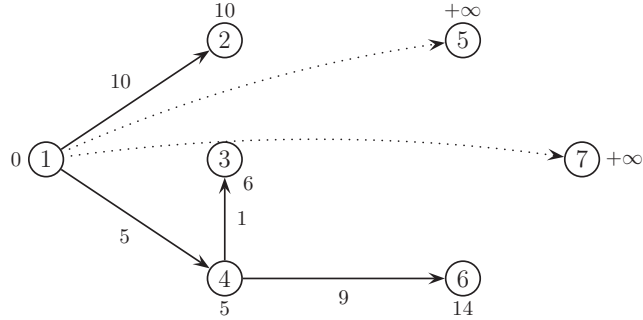


**2° iterazione.** Nell'insieme  $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  il nodo con etichetta minima è il nodo 4. Si estrae da  $U$  il nodo 4 e si esamina la stella uscente da 4, cioè gli archi  $(4,3)$  e  $(4,6)$ :

$$\begin{aligned} (4,3): \quad 7 = \pi_3 > \pi_4 + c_{43} = 6 &\implies p_3 = 4, \quad \pi_3 = 6, \\ (4,6): \quad +\infty = \pi_6 > \pi_4 + c_{46} = 14 &\implies p_6 = 4, \quad \pi_6 = 14, \end{aligned}$$

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:

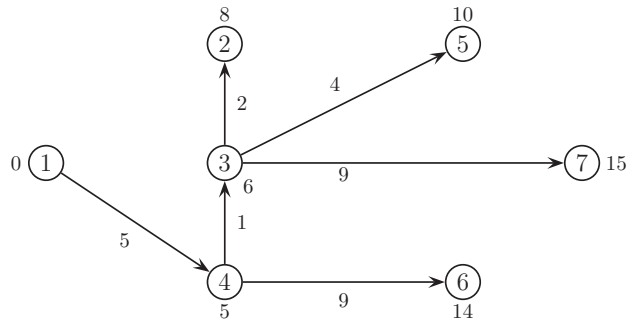
## 7.2 ALGORITMO DI DIJKSTRA



**3° iterazione.** Nell'insieme  $U = \{2, 3, 5, 6, 7\}$  il nodo con etichetta minima è il nodo 3. Si estrae da  $U$  il nodo 3 e si esamina la stella uscente da 3, cioè gli archi  $(3,2)$ ,  $(3,5)$  e  $(3,7)$ :

$$\begin{aligned} (3,2): \quad 10 = \pi_2 > \pi_3 + c_{32} = 8 &\implies p_2 = 3, \quad \pi_2 = 8, \\ (3,5): \quad +\infty = \pi_5 > \pi_3 + c_{35} = 10 &\implies p_5 = 3, \quad \pi_5 = 10, \\ (3,7): \quad +\infty = \pi_7 > \pi_3 + c_{37} = 15 &\implies p_7 = 3, \quad \pi_7 = 15, \end{aligned}$$

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:

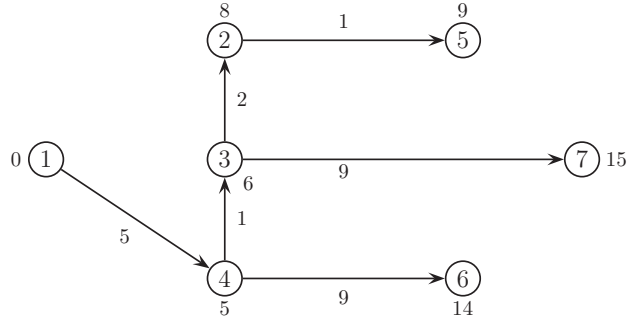


**4° iterazione.** Nell'insieme  $U = \{2, 5, 6, 7\}$  il nodo con etichetta minima è il nodo 2. Si estrae da  $U$  il nodo 2 e si esamina l'unico arco uscente da 2, cioè  $(2,5)$ :

$$(2,5): \quad 10 = \pi_5 > \pi_2 + c_{25} = 9 \implies p_5 = 2, \quad \pi_5 = 9.$$

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:

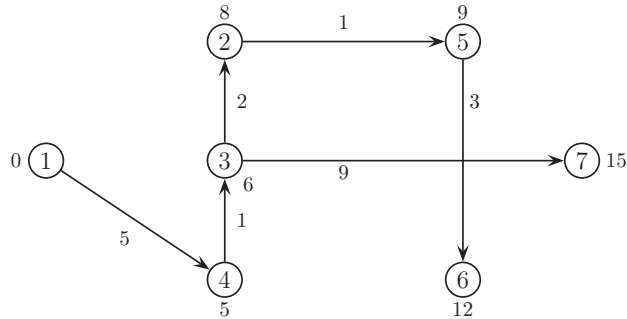
## 7. CAMMINI MINIMI



**5° iterazione.** Nell'insieme  $U = \{5, 6, 7\}$  il nodo con etichetta minima è il nodo 5. Si estrae da  $U$  il nodo 5 e si esamina la stella uscente da 5, cioè gli archi  $(5,6)$  e  $(5,7)$ :

$$\begin{aligned} (5,6): \quad 14 = \pi_6 > \pi_5 + c_{56} = 12 &\implies p_6 = 5, \quad \pi_6 = 12, \\ (5,7): \quad 15 = \pi_7 = \pi_5 + c_{57} = 15 & \end{aligned}$$

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:

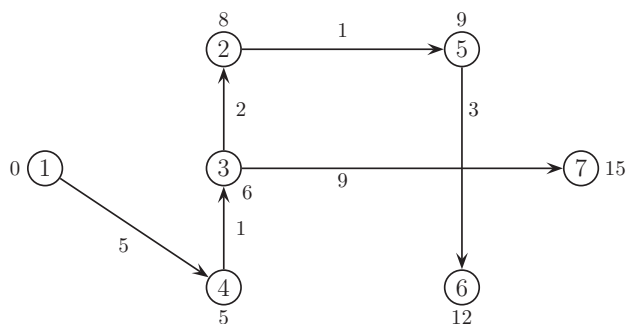


**6° iterazione.** Dall'insieme  $U = \{6, 7\}$  si estrae il nodo 6 e si esamina la stella uscente da 6, cioè l'arco  $(6,7)$ :

$$(6,7): \quad 15 = \pi_7 < \pi_6 + c_{67} = 16$$

L'albero e le relative etichette rimangono le stesse dell'iterazione precedente.

**7° iterazione.** Dall'insieme  $U = \{7\}$  si estrae il nodo 7. Non ci sono archi uscenti dal nodo 7, quindi  $U = \emptyset$  e l'algoritmo si ferma. L'albero dei cammini minimi e le relative etichette ai nodi, che rappresentano i costi dei cammini minimi, sono i seguenti:



□

## 7.3 Algoritmo di Bellman–Ford

Illustriamo ora un altro algoritmo specifico per trovare l'albero dei cammini minimi di radice  $r$  in cui i costi degli archi possano anche essere negativi. Alla  $k$ -esima iterazione l'algoritmo di Bellman–Ford (vedi Figura 7.1) mantiene due vettori  $\pi^k$  e  $p$  di lunghezza  $n = |N|$ . I vettori  $\pi^k$  e  $p$  vengono modificati in modo che per ogni nodo  $j$  la quantità  $\pi_j^k$  sia uguale al *costo del cammino minimo da  $r$  a  $j$  che contiene al più  $k$  archi*. L'algoritmo si ferma dopo al più  $n$  iterazioni. Se un albero dei cammini minimi esiste, allora all'ultima iterazione il vettore  $p$  indica i predecessori dei nodi nell'albero ottimo e  $\pi$  i costi dei cammini minimi dalla radice  $r$  a tutti i nodi del grafo. Se invece non esiste un albero dei cammini minimi, allora un ciclo orientato di costo negativo può essere ricavato dal vettore  $p$  all'ultima iterazione.

**Teorema 7.3.1.** *L'algoritmo di Bellman–Ford trova un albero dei cammini minimi oppure un ciclo orientato di costo negativo dopo al più  $n$  iterazioni.*

**Dimostrazione.** È chiaro che l'algoritmo termina dopo al più  $n$  iterazioni. Per dimostrare la correttezza dell'algoritmo, bisogna provare che per ogni iterazione  $k$  vale la seguente proprietà:

per ogni nodo  $j$  l'etichetta  $\pi_j^k$  è uguale al costo del cammino minimo da  $r$  a  $j$  che contiene al più  $k$  archi.

Procediamo per induzione su  $k$ . Per  $k = 0$  la proprietà è banalmente vera. Dimostriamo ora che la proprietà è vera all'iterazione  $k$  supponendo, per ipotesi induttiva, che la proprietà sia vera all'iterazione  $k - 1$ . Consideriamo un generico nodo  $j$  e la stella entrante in  $j$ :

$$BS(j) = \{i \in N : \text{esiste un arco } (i, j) \in A\}$$

cioè l'insieme dei nodi dai quali esce un arco che entra in  $j$ . Per ipotesi induttiva  $\pi_j^{k-1}$  è uguale al costo del cammino minimo da  $r$  a  $j$  che contiene al più  $k - 1$  archi ed anche per ogni nodo

Algoritmo di Bellman-Ford

1. Poni  $\pi_i^0 := \begin{cases} +\infty & i \neq r, \\ 0 & i = r, \end{cases}$ ,  $p_i := \begin{cases} -1 & i \neq r, \\ 0 & i = r. \end{cases}$ ,  $k := 1$ .
2. Per ogni nodo  $j = 1, \dots, n$ :  
 poni  $BS(j) := \{i \in N : \text{esiste un arco } (i, j) \in A\}$   
 indica con  $u$  il nodo in cui è raggiunto il  $\min_{i \in BS(j)} [\pi_i^{k-1} + c_{ij}]$   
**if**  $\pi_j^{k-1} > \pi_u^{k-1} + c_{uj}$  **then**  $\pi_j^k := \pi_u^{k-1} + c_{uj}$ ,  $p_j := u$   
**else**  $\pi_j^k := \pi_j^{k-1}$
3. **if**  $\pi^k = \pi^{k-1}$  **then** STOP ( $p$  fornisce un albero dei cammini minimi)
4. **if**  $k = n$  **then** STOP ( $p$  fornisce un ciclo orientato di costo negativo)  
**else**  $k := k + 1$  e torna al passo 2

Figura 7.1: algoritmo di Bellman-Ford

$i \in BS(j)$  si ha che  $\pi_i^{k-1}$  è uguale al costo del cammino minimo da  $r$  a  $i$  che contiene al più  $k-1$  archi. Il cammino minimo da  $r$  a  $j$  che contiene al più  $k$  archi o è uguale al cammino minimo da  $r$  a  $j$  che contiene al più  $k-1$  archi, oppure è formato dal cammino minimo da  $r$  ad un nodo  $i \in BS(j)$  che contiene al più  $k-1$  archi più l'arco  $(i, j)$ . Pertanto il costo del cammino minimo da  $r$  a  $j$  che contiene al più  $k$  archi è dato da:

$$\min \left\{ \pi_j^{k-1}, \min \{ \pi_i^{k-1} + c_{ij} : i \in BS(j) \} \right\},$$

che coincide con  $\pi_j^k$  per le regole di aggiornamento delle etichette al passo 2. Inoltre se  $\pi_j^k < \pi_j^{k-1}$ , allora il cammino minimo da  $r$  a  $j$  che contiene al più  $k$  archi ha esattamente  $k$  archi.

L'algoritmo termina in due casi: o le etichette non vengono modificate rispetto all'iterazione precedente oppure alcune etichette vengono modificate all'iterazione  $n$ .

Se alla  $k$ -esima iterazione le etichette non sono state modificate, cioè  $\pi^k = \pi^{k-1}$ , allora rimarranno costanti in tutte le eventuali iterazioni successive, ossia per ogni nodo  $j$  si ha:

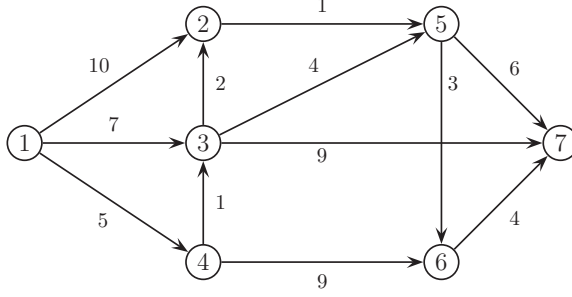
$$\pi_j^k = \dots = \pi_j^{n-1},$$

cioè  $\pi_j^k$  è il costo del cammino minimo da  $r$  a  $j$  che contiene al più  $n-1$  archi (cioè che passa al più su tutti i nodi), ossia è il costo del cammino minimo da  $r$  a  $j$  senza limitazioni sul numero di archi che contiene.

Se invece l'etichetta di un nodo  $j$  è stata modificata alla  $n$ -esima iterazione, allora il cammino minimo da  $r$  a  $j$  contiene esattamente  $n$  archi, ossia passa due volte su uno stesso nodo e quindi contiene un ciclo orientato di costo negativo.  $\square$



**Esempio 7.3.1.** Applichiamo l'algoritmo di Bellman-Ford per trovare l'albero dei cammini minimi sullo stesso grafo dell'Esempio 7.1.1:



**1° iterazione.** Analizziamo gli archi entranti in ogni nodo. Non ci sono archi che entrano nel nodo 1, quindi la sua etichetta rimane invariata:  $\pi_1^1 = 0$ . Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^0 + c_{12}, \pi_3^0 + c_{32}\} = \min \{10, +\infty\} = 10 < \pi_2^0 = +\infty,$$

quindi  $\pi_2^1 = 10$  e  $p_2 = 1$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (4,3):

$$\min \{\pi_1^0 + c_{13}, \pi_4^0 + c_{43}\} = \min \{7, +\infty\} = 7 < \pi_3^0 = +\infty,$$

quindi  $\pi_3^1 = 7$  e  $p_3 = 1$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (1,4):

$$\pi_1^0 + c_{14} = 5 < \pi_4^0 = +\infty,$$

quindi  $\pi_4^1 = 5$  e  $p_4 = 1$ . Per il nodo 5 analizziamo gli archi (2,5) e (3,5):

$$\min \{\pi_2^0 + c_{25}, \pi_3^0 + c_{35}\} = \min \{+\infty, +\infty\} = +\infty = \pi_5^0,$$

quindi  $\pi_5^1 = +\infty$ . Per il nodo 6 analizziamo gli archi (4,6) e (5,6):

$$\min \{\pi_4^0 + c_{46}, \pi_5^0 + c_{56}\} = \min \{+\infty, +\infty\} = +\infty = \pi_6^0,$$

quindi  $\pi_6^1 = +\infty$ . Per il nodo 7 analizziamo gli archi (3,7), (5,7) e (6,7):

$$\min \{\pi_3^0 + c_{37}, \pi_5^0 + c_{57}, \pi_6^0 + c_{67}\} = \min \{+\infty, +\infty, +\infty\} = +\infty = \pi_7^0,$$

quindi  $\pi_7^1 = +\infty$ . Alla fine della prima iterazione abbiamo

$$\pi^1 = (0, 10, 7, 5, +\infty, +\infty, +\infty) \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

## 7. CAMMINI MINIMI

**2° iterazione.** Analizziamo gli archi entranti in ogni nodo. Non ci sono archi che entrano nel nodo 1, quindi la sua etichetta rimane invariata:  $\pi_1^2 = 0$ . Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^1 + c_{12}, \pi_3^1 + c_{32}\} = \min \{10, 9\} = 9 < \pi_2^1 = 10,$$

quindi  $\pi_2^2 = 9$  e  $p_2 = 3$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (4,3):

$$\min \{\pi_1^1 + c_{13}, \pi_4^1 + c_{43}\} = \min \{7, 6\} = 6 < \pi_3^1 = 7,$$

quindi  $\pi_3^2 = 6$  e  $p_3 = 4$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (1,4):

$$\pi_1^1 + c_{14} = 5 = \pi_4^1,$$

quindi  $\pi_4^2 = 5$ . Per il nodo 5 analizziamo gli archi (2,5) e (3,5):

$$\min \{\pi_2^1 + c_{25}, \pi_3^1 + c_{35}\} = \min \{11, 11\} = 11 < \pi_5^1 = +\infty,$$

quindi  $\pi_5^2 = 11$ . Per il nodo 6 analizziamo gli archi (4,6) e (5,6):

$$\min \{\pi_4^1 + c_{46}, \pi_5^1 + c_{56}\} = \min \{14, +\infty\} = 14 < \pi_6^1 = +\infty,$$

quindi  $\pi_6^2 = 14$ . Per il nodo 7 analizziamo gli archi (3,7), (5,7) e (6,7):

$$\min \{\pi_3^1 + c_{37}, \pi_5^1 + c_{57}, \pi_6^1 + c_{67}\} = \min \{16, +\infty, +\infty\} = 16 < \pi_7^1 = +\infty,$$

quindi  $\pi_7^2 = 16$ . Alla fine della seconda iterazione abbiamo

$$\pi^2 = (0, 9, 6, 5, 11, 14, 16) \quad p = (0, 3, 4, 1, 2, 4, 3).$$

**3° iterazione.** Analizziamo gli archi entranti in ogni nodo. Non ci sono archi che entrano nel nodo 1, quindi la sua etichetta rimane invariata:  $\pi_1^3 = 0$ . Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^2 + c_{12}, \pi_3^2 + c_{32}\} = \min \{10, 8\} = 8 < \pi_2^2 = 9,$$

quindi  $\pi_2^3 = 8$  e  $p_2 = 3$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (4,3):

$$\min \{\pi_1^2 + c_{13}, \pi_4^2 + c_{43}\} = \min \{7, 6\} = 6 < \pi_3^2 = 7,$$

quindi  $\pi_3^3 = 6$  e  $p_3 = 4$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (1,4):

$$\pi_1^2 + c_{14} = 5 = \pi_4^2,$$

quindi  $\pi_4^3 = 5$ . Per il nodo 5 analizziamo gli archi (2,5) e (3,5):

$$\min \{\pi_2^2 + c_{25}, \pi_3^2 + c_{35}\} = \min \{10, 10\} = 10 < \pi_5^2 = 11,$$

### 7.3 ALGORITMO DI BELLMAN-FORD

quindi  $\pi_5^3 = 10$  e  $p_5 = 2$ . Per il nodo 6 analizziamo gli archi (4,6) e (5,6):

$$\min \{\pi_4^2 + c_{46}, \pi_5^2 + c_{56}\} = \min \{14, 14\} = 14 = \pi_6^2,$$

quindi  $\pi_6^3 = 14$ . Per il nodo 7 analizziamo gli archi (3,7), (5,7) e (6,7):

$$\min \{\pi_3^2 + c_{37}, \pi_5^2 + c_{57}, \pi_6^2 + c_{67}\} = \min \{15, 17, 18\} = 15 < \pi_7^2 = 16,$$

quindi  $\pi_7^3 = 15$  e  $p_7 = 3$ . Alla fine della terza iterazione abbiamo

$$\pi^3 = (0, 8, 6, 5, 10, 14, 15) \quad p = (0, 3, 4, 1, 2, 4, 3).$$

**4° iterazione.** Analizziamo gli archi entranti in ogni nodo. Non ci sono archi che entrano nel nodo 1, quindi la sua etichetta rimane invariata:  $\pi_1^4 = 0$ . Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^3 + c_{12}, \pi_3^3 + c_{32}\} = \min \{10, 8\} = 8 = \pi_2^3,$$

quindi  $\pi_2^4 = 8$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (4,3):

$$\min \{\pi_1^3 + c_{13}, \pi_4^3 + c_{43}\} = \min \{7, 6\} = 6 = \pi_3^3,$$

quindi  $\pi_3^4 = 6$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (1,4):

$$\pi_1^3 + c_{14} = 5 = \pi_4^3,$$

quindi  $\pi_4^4 = 5$ . Per il nodo 5 analizziamo gli archi (2,5) e (3,5):

$$\min \{\pi_2^3 + c_{25}, \pi_3^3 + c_{35}\} = \min \{9, 10\} = 9 < \pi_5^3 = 10,$$

quindi  $\pi_5^4 = 9$  e  $p_5 = 2$ . Per il nodo 6 analizziamo gli archi (4,6) e (5,6):

$$\min \{\pi_4^3 + c_{46}, \pi_5^3 + c_{56}\} = \min \{14, 13\} = 13 < \pi_6^3 = 14,$$

quindi  $\pi_6^4 = 13$ . Per il nodo 7 analizziamo gli archi (3,7), (5,7) e (6,7):

$$\min \{\pi_3^3 + c_{37}, \pi_5^3 + c_{57}, \pi_6^3 + c_{67}\} = \min \{15, 16, 18\} = 15 = \pi_7^3,$$

quindi  $\pi_7^4 = 15$ . Alla fine della quarta iterazione abbiamo

$$\pi^4 = (0, 8, 6, 5, 9, 13, 15) \quad p = (0, 3, 4, 1, 2, 5, 3).$$

**5° iterazione.** Analizziamo gli archi entranti in ogni nodo. Non ci sono archi che entrano nel nodo 1, quindi la sua etichetta rimane invariata:  $\pi_1^5 = 0$ . Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^4 + c_{12}, \pi_3^4 + c_{32}\} = \min \{10, 8\} = 8 = \pi_2^4,$$

## 7. CAMMINI MINIMI

quindi  $\pi_2^5 = 8$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (4,3):

$$\min \{\pi_1^4 + c_{13}, \pi_4^4 + c_{43}\} = \min \{7, 6\} = 6 = \pi_3^4,$$

quindi  $\pi_3^5 = 6$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (1,4):

$$\pi_1^4 + c_{14} = 5 = \pi_4^4,$$

quindi  $\pi_4^5 = 5$ . Per il nodo 5 analizziamo gli archi (2,5) e (3,5):

$$\min \{\pi_2^4 + c_{25}, \pi_3^4 + c_{35}\} = \min \{9, 10\} = 9 = \pi_5^4,$$

quindi  $\pi_5^5 = 9$ . Per il nodo 6 analizziamo gli archi (4,6) e (5,6):

$$\min \{\pi_4^4 + c_{46}, \pi_5^4 + c_{56}\} = \min \{14, 12\} = 12 < \pi_6^4 = 13,$$

quindi  $\pi_6^5 = 12$  e  $p_6 = 5$ . Per il nodo 7 analizziamo gli archi (3,7), (5,7) e (6,7):

$$\min \{\pi_3^4 + c_{37}, \pi_5^4 + c_{57}, \pi_6^4 + c_{67}\} = \min \{15, 15, 17\} = 15 = \pi_7^4,$$

quindi  $\pi_7^5 = 15$ . Alla fine della quinta iterazione abbiamo

$$\pi^5 = (0, 8, 6, 5, 9, 12, 15) \quad p = (0, 3, 4, 1, 2, 5, 3).$$

**6° iterazione.** Analizziamo gli archi entranti in ogni nodo. Non ci sono archi che entrano nel nodo 1, quindi la sua etichetta rimane invariata:  $\pi_1^6 = 0$ . Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^5 + c_{12}, \pi_3^5 + c_{32}\} = \min \{10, 8\} = 8 = \pi_2^5,$$

quindi  $\pi_2^6 = 8$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (4,3):

$$\min \{\pi_1^5 + c_{13}, \pi_4^5 + c_{43}\} = \min \{7, 6\} = 6 = \pi_3^5,$$

quindi  $\pi_3^6 = 6$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (1,4):

$$\pi_1^5 + c_{14} = 5 = \pi_4^5,$$

quindi  $\pi_4^6 = 5$ . Per il nodo 5 analizziamo gli archi (2,5) e (3,5):

$$\min \{\pi_2^5 + c_{25}, \pi_3^5 + c_{35}\} = \min \{9, 10\} = 9 = \pi_5^5,$$

quindi  $\pi_5^6 = 9$ . Per il nodo 6 analizziamo gli archi (4,6) e (5,6):

$$\min \{\pi_4^5 + c_{46}, \pi_5^5 + c_{56}\} = \min \{14, 12\} = 12 = \pi_6^5,$$

quindi  $\pi_6^6 = 12$ . Per il nodo 7 analizziamo gli archi (3,7), (5,7) e (6,7):

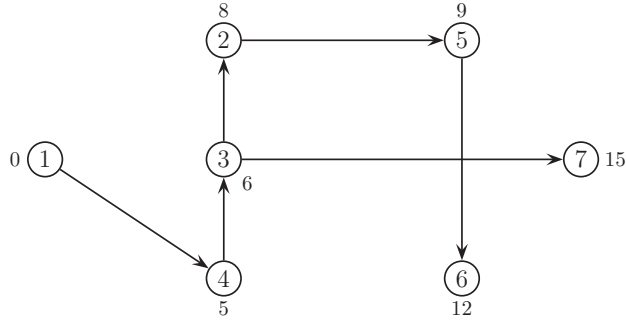
$$\min \{\pi_3^5 + c_{37}, \pi_5^5 + c_{57}, \pi_6^5 + c_{67}\} = \min \{15, 15, 16\} = 15 = \pi_7^5,$$

quindi  $\pi_7^6 = 15$ . Alla fine della sesta iterazione abbiamo

$$\pi^6 = (0, 8, 6, 5, 9, 12, 15) \quad p = (0, 3, 4, 1, 2, 5, 3).$$

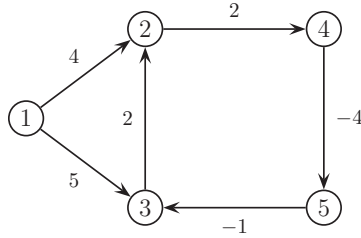
Le etichette sono uguali a quelle della quinta iterazione, quindi abbiamo  $p$  contiene l'albero dei cammini minimi:

### 7.3 ALGORITMO DI BELLMAN-FORD



□

**Esempio 7.3.2.** Applichiamo l'algoritmo di Bellman-Ford per risolvere il problema dei cammini minimi dell'Esempio 7.1.2:



**1° iterazione.** Non ci sono archi che entrano nel nodo 1, quindi la sua etichetta rimane invariata:  $\pi_1^1 = 0$  per tutto l'algoritmo. Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^0 + c_{12}, \pi_3^0 + c_{32}\} = \min \{4, +\infty\} = 4 < \pi_2^0 = +\infty,$$

quindi  $\pi_2^1 = 4$  e  $p_2 = 1$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (5,3):

$$\min \{\pi_1^0 + c_{13}, \pi_5^0 + c_{53}\} = \min \{5, +\infty\} = 5 < \pi_3^0 = +\infty,$$

quindi  $\pi_3^1 = 5$  e  $p_3 = 1$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (2,4):

$$\pi_2^0 + c_{24} = +\infty = \pi_4^0,$$

quindi  $\pi_4^1 = +\infty$ . Per il nodo 5 analizziamo solo l'arco (4,5):

$$\pi_4^0 + c_{45} = +\infty = \pi_5^0,$$

quindi  $\pi_5^1 = +\infty$ . Alla fine della prima iterazione abbiamo

$$\pi^1 = (0, 4, 5, +\infty, +\infty) \quad p = (0, 1, 1, -1, -1).$$

## 7. CAMMINI MINIMI

**2° iterazione.** Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^1 + c_{12}, \pi_3^1 + c_{32}\} = \min \{4, 7\} = 4 = \pi_2^1,$$

quindi  $\pi_2^2 = 4$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (5,3):

$$\min \{\pi_1^1 + c_{13}, \pi_5^1 + c_{53}\} = \min \{5, +\infty\} = 5 = \pi_3^1,$$

quindi  $\pi_3^2 = 5$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (2,4):

$$\pi_2^1 + c_{24} = 6 < \pi_4^1 = +\infty,$$

quindi  $\pi_4^2 = 6$  e  $p_4 = 2$ . Per il nodo 5 analizziamo solo l'arco (4,5):

$$\pi_4^1 + c_{45} = +\infty = \pi_5^1,$$

quindi  $\pi_5^2 = +\infty$ . Alla fine della seconda iterazione abbiamo

$$\pi^2 = (0, 4, 5, 6, +\infty) \quad p = (0, 1, 1, 2, -1).$$

**3° iterazione.** Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^2 + c_{12}, \pi_3^2 + c_{32}\} = \min \{4, 7\} = 4 = \pi_2^2,$$

quindi  $\pi_2^3 = 4$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (5,3):

$$\min \{\pi_1^2 + c_{13}, \pi_5^2 + c_{53}\} = \min \{5, +\infty\} = 5 = \pi_3^2,$$

quindi  $\pi_3^3 = 5$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (2,4):

$$\pi_2^2 + c_{24} = 6 = \pi_4^2,$$

quindi  $\pi_4^3 = 6$ . Per il nodo 5 analizziamo solo l'arco (4,5):

$$\pi_4^2 + c_{45} = 2 < \pi_5^2 = +\infty,$$

quindi  $\pi_5^3 = 2$  e  $p_5 = 4$ . Alla fine della terza iterazione abbiamo

$$\pi^3 = (0, 4, 5, 6, 2) \quad p = (0, 1, 1, 2, 4).$$

**4° iterazione.** Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^3 + c_{12}, \pi_3^3 + c_{32}\} = \min \{4, 7\} = 4 = \pi_2^3,$$

quindi  $\pi_2^4 = 4$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (5,3):

$$\min \{\pi_1^3 + c_{13}, \pi_5^3 + c_{53}\} = \min \{5, 1\} = 1 < \pi_3^3 = 5,$$

### 7.3 ALGORITMO DI BELLMAN-FORD

quindi  $\pi_3^4 = 1$  e  $p_3 = 5$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (2,4):

$$\pi_2^3 + c_{24} = 6 = \pi_4^3,$$

quindi  $\pi_4^4 = 6$ . Per il nodo 5 analizziamo solo l'arco (4,5):

$$\pi_4^3 + c_{45} = 2 = \pi_5^3,$$

quindi  $\pi_5^4 = 2$ . Alla fine della quarta iterazione abbiamo

$$\pi^4 = (0, 4, 1, 6, 2) \quad p = (0, 1, 5, 2, 4).$$

**5° iterazione.** Per il nodo 2 analizziamo gli archi (1,2) e (3,2):

$$\min \{\pi_1^4 + c_{12}, \pi_3^4 + c_{32}\} = \min \{4, 3\} = 3 < \pi_2^4 = 4,$$

quindi  $\pi_2^5 = 3$  e  $p_2 = 3$ . Per il nodo 3 analizziamo gli archi (1,3) e (5,3):

$$\min \{\pi_1^4 + c_{13}, \pi_5^4 + c_{53}\} = \min \{5, 1\} = 1 = \pi_3^4,$$

quindi  $\pi_3^5 = 1$ . Per il nodo 4 analizziamo solo l'arco (2,4):

$$\pi_2^4 + c_{24} = 6 = \pi_4^4,$$

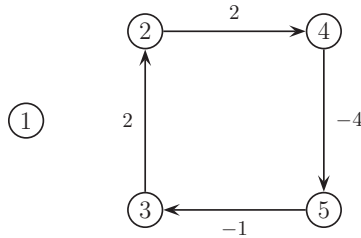
quindi  $\pi_4^5 = 6$ . Per il nodo 5 analizziamo solo l'arco (4,5):

$$\pi_4^4 + c_{45} = 2 = \pi_5^4,$$

quindi  $\pi_5^5 = 2$ . Alla fine della quinta iterazione abbiamo

$$\pi^5 = (0, 3, 1, 6, 2) \quad p = (0, 3, 5, 2, 4).$$

Il grafo ha 5 nodi ed alla quinta iterazione è stata modificata l'etichetta del nodo 2, quindi un albero dei cammini minimi non esiste e un ciclo orientato di costo negativo è dato dal vettore  $p$  dei predecessori:



□





# Capitolo 8

## Flusso massimo

Supponiamo di avere un grafo  $G = (N, A)$  in cui siano assegnate le capacità superiori  $u_{ij}$  sugli archi. Il problema del flusso massimo consiste nello spedire il massimo flusso possibile da un nodo origine  $s$  ad un nodo destinazione  $t$  rispettando i vincoli di capacità sugli archi. Abbiamo visto nel paragrafo 5.4 che tale problema può essere formulato come problema di PL:

$$\begin{cases} \max & v \\ E & x = b \\ 0 \leq & x \leq u \end{cases} \quad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ v & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (8.1)$$

Il valore di un flusso ammissibile  $x$  è indicato da  $v$  e rappresenta la quantità di flusso uscente dall'origine  $s$  ed entrante nella destinazione  $t$ , cioè

$$v = \sum_{(s,j) \in A} x_{sj} = \sum_{(i,t) \in A} x_{it}.$$

### 8.1 Algoritmo del simplesso per flusso massimo

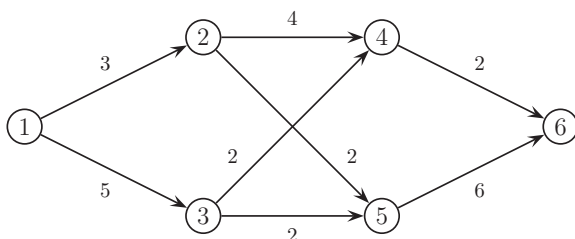
Il problema del flusso massimo può essere risolto mediante l'algoritmo del simplesso per flussi, dopo averlo trasformato in un problema di flusso di costo minimo (di tipo circolazione) aggiungendo un arco fittizio  $(t, s)$  di costo  $-1$  e di capacità  $+\infty$ , assegnando costo nullo a tutti gli altri archi e ponendo bilanci nulli a tutti i nodi:

$$\begin{cases} \min & -v \\ \left( \begin{array}{c|c} E & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = 0 \\ 0 \leq & x \leq u \\ v \geq & 0 \end{cases}$$

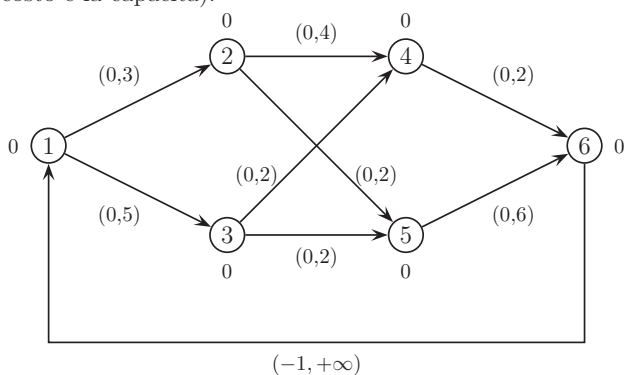
Illustriamo con un esempio tale risoluzione.

## 8. FLUSSO MASSIMO

**Esempio 8.1.1.** Consideriamo il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente in cui sono indicate le capacità superiori sugli archi:



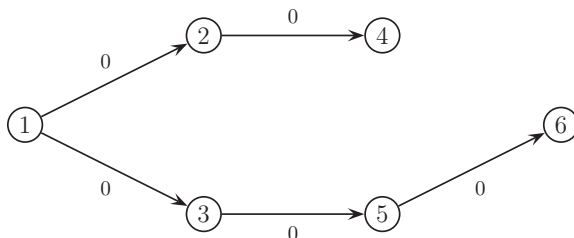
Tale problema equivale al problema di flusso di costo minimo sul seguente grafo (sugli archi sono indicati il costo e la capacità):



Risolviamo ora questo problema di flusso di costo minimo con il semplice per flussi partendo dalla tripartizione:

$$\begin{aligned} T &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 6)\}, \\ L &= \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (6, 1)\}, \\ U &= \emptyset. \end{aligned}$$

**1° iterazione.** Poiché tutti i nodi hanno bilancio nullo, il flusso di base iniziale è  $\bar{x} = 0$ :



## 8.1 ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSO MASSIMO

I costi degli archi di  $T$  sono nulli e quindi anche i potenziali di base sono tutti uguali a zero:  $\bar{\pi} = 0$ . Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi di  $L$  e  $U$ :

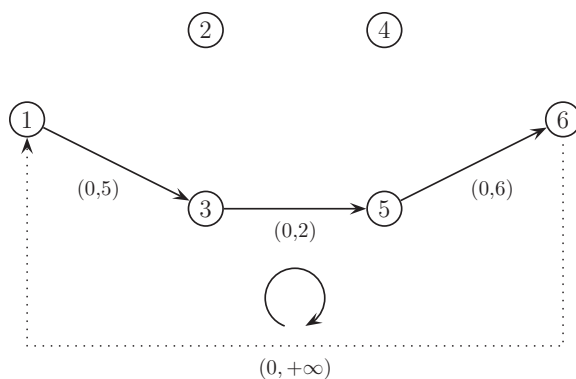
$$(2, 5) \in L : \quad c_{25}^{\bar{\pi}} = 0$$

$$(3, 4) \in L : \quad c_{34}^{\bar{\pi}} = 0$$

$$(4, 6) \in L : \quad c_{46}^{\bar{\pi}} = 0$$

$$(6, 1) \in L : \quad c_{61}^{\bar{\pi}} = -1$$

L'arco (6,1) viola le condizioni di Bellman e forma con gli archi di  $T$  il seguente ciclo (sugli archi sono indicati il flusso e la capacità):



Non ci sono archi discordi al verso del ciclo, quindi abbiamo:

$$\vartheta^+ = \min \{u_{13} - \bar{x}_{13}, u_{35} - \bar{x}_{35}, u_{56} - \bar{x}_{56}, u_{61} - \bar{x}_{61}\} = \min \{5, 2, 6, +\infty\} = 2$$

$$\vartheta^- = \min \emptyset = +\infty$$

$$\vartheta = \vartheta^+ = 2$$

Perciò l'arco (6,1) da  $L$  va in  $T$  mentre l'arco (3,5) da  $B$  va in  $U$ . La nuova tripartizione è:

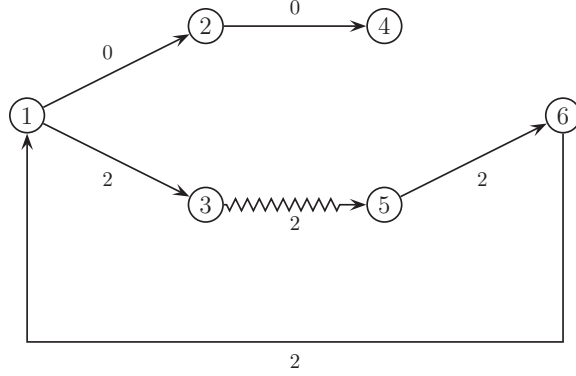
$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 6), (6, 1)\},$$

$$L = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6)\},$$

$$U = \{(3, 5)\}.$$

**2° iterazione.** Il nuovo flusso di base è:

# 8. FLUSSO MASSIMO



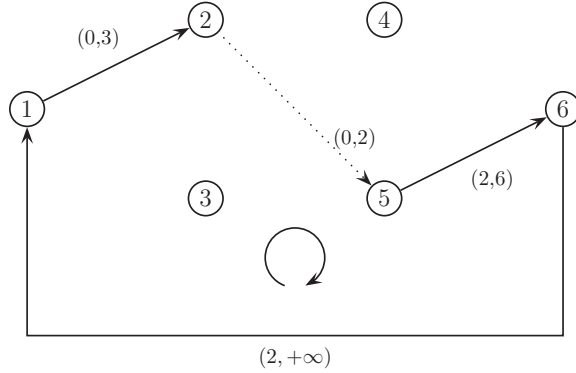
I potenziali di base diventano:

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_4 = 0 \quad \bar{\pi}_6 = \bar{\pi}_1 - c_{61} = 0 - (-1) = 1 \quad \bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_6 = 1.$$

Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi di  $L$  e  $U$ :

$$(2,5) \in L \quad c_{25}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1,$$

quindi l'arco  $(2,5)$  viola le condizioni di Bellman e forma con gli archi di  $T$  il seguente ciclo (sugli archi sono indicati il flusso e la capacità):



Non ci sono archi discordi al verso del ciclo, quindi abbiamo:

$$\vartheta^+ = \min \{u_{12} - \bar{x}_{12}, u_{25} - \bar{x}_{25}, u_{56} - \bar{x}_{56}, u_{61} - \bar{x}_{61}\} = \min \{3, 2, 4, +\infty\} = 2$$

$$\vartheta^- = \min \emptyset = +\infty$$

$$\vartheta = \vartheta^+ = 2$$

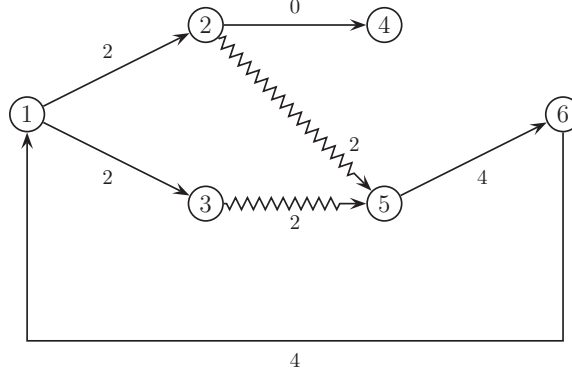
Perciò l'arco  $(2,5)$  da  $L$  va direttamente in  $U$ . La nuova tripartizione è:

$$T = \{(1,2), (1,3), (2,4), (5,6), (6,1)\},$$

$$L = \{(3,4), (4,6)\},$$

$$U = \{(2,5), (3,5)\}.$$

**3° iterazione.** Il nuovo flusso di base è:



Poiché l'albero  $T$  non è stato modificato, i potenziali di base rimangono invariati:

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_4 = 0 \quad \bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_6 = 1.$$

Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi di  $L$  e  $U$ :

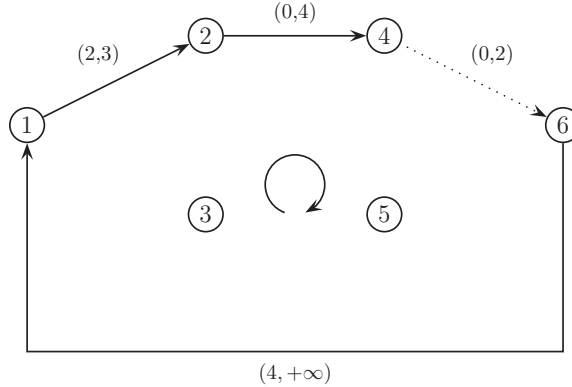
$$(2, 5) \in U : c_{25}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$(3, 4) \in L : c_{34}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$(3, 5) \in U : c_{35}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$(4, 6) \in L : c_{46}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

quindi l'arco  $(4,6)$  viola le condizioni di Bellman e forma con gli archi di  $T$  il seguente ciclo (sugli archi sono indicati il flusso e la capacità):



Non ci sono archi discordi al verso del ciclo, quindi abbiamo:

$$\vartheta^+ = \min \{u_{12} - \bar{x}_{12}, u_{24} - \bar{x}_{24}, u_{46} - \bar{x}_{46}, u_{61} - \bar{x}_{61}\} = \min \{1, 4, 2, +\infty\} = 1$$

$$\vartheta^- = \min \emptyset = +\infty$$

$$\vartheta = \vartheta^+ = 1$$

## 8. FLUSSO MASSIMO

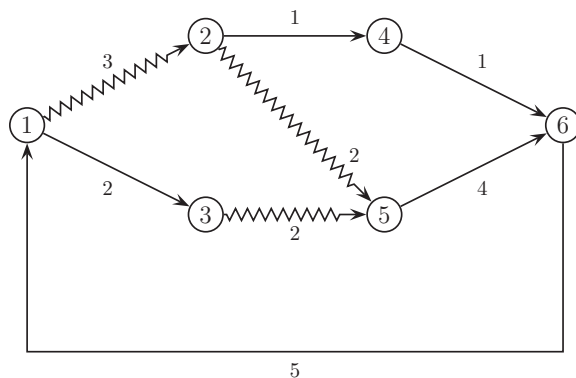
Perciò l'arco  $(1,2)$  da  $T$  va in  $U$  mentre l'arco  $(4,6)$  da  $L$  va in  $T$ . La nuova tripartizione è:

$$T = \{(1, 3), (2, 4), (4, 6), (5, 6), (6, 1)\},$$

$$L = \{(3, 4)\},$$

$$U = \{(1, 2), (2, 5), (3, 5)\}.$$

**4° iterazione.** Il nuovo flusso di base è:



I potenziali di base diventano:

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_3 = 0 \quad \bar{\pi}_6 = \bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_2 = 1.$$

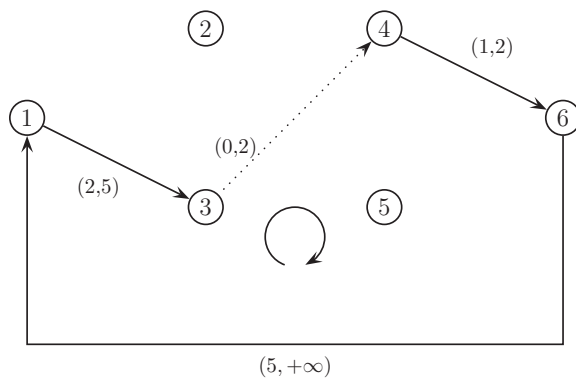
Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi di  $L$  e  $U$ :

$$(1, 2) \in U : c_{12}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$(2, 5) \in U : c_{25}^{\bar{\pi}} = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$(3, 4) \in L : c_{34}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

quindi l'arco  $(3,4)$  viola le condizioni di Bellman e forma con gli archi di  $T$  il seguente ciclo (sugli archi sono indicati il flusso e la capacità):



## 8.1 ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSO MASSIMO

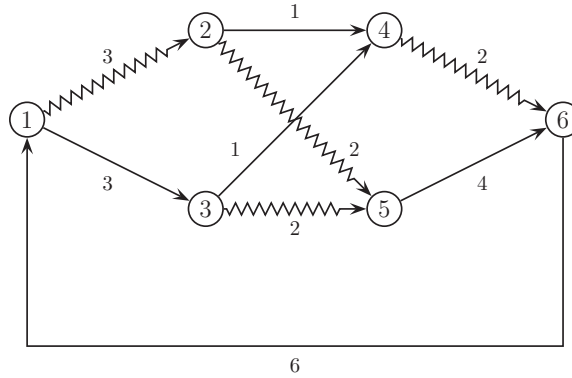
Non ci sono archi discordi al verso del ciclo, quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}\vartheta^+ &= \min \{u_{13} - \bar{x}_{13}, u_{34} - \bar{x}_{34}, u_{46} - \bar{x}_{46}, u_{61} - \bar{x}_{61}\} = \min \{3, 2, 1, +\infty\} = 1 \\ \vartheta^- &= \min \emptyset = +\infty \\ \vartheta &= \vartheta^+ = 1\end{aligned}$$

Perciò l'arco (4,6) da  $T$  va in  $U$  mentre l'arco (3,4) da  $L$  va in  $T$ . La nuova tripartizione è:

$$\begin{aligned}T &= \{(1, 3), (2, 4), (3, 4), (5, 6), (6, 1)\}, \\ L &= \emptyset, \\ U &= \{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 6)\}.\end{aligned}$$

**5° iterazione.** Il nuovo flusso di base è:



I potenziali di base diventano:

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_2 = 0 \quad \bar{\pi}_6 = \bar{\pi}_5 = 1.$$

Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi di  $L$  e  $U$ :

$$\begin{aligned}(1, 2) \in U : c_{12}^{\bar{\pi}} &= 0 + 0 - 0 = 0 \\ (2, 5) \in U : c_{25}^{\bar{\pi}} &= 0 + 0 - 1 = -1 \\ (3, 5) \in U : c_{35}^{\bar{\pi}} &= 0 + 0 - 1 = -1 \\ (4, 6) \in U : c_{46}^{\bar{\pi}} &= 0 + 0 - 1 = -1\end{aligned}$$

quindi il flusso di base è ottimo, ossia è il flusso di valore massimo uguale a 6.

□

Illustreremo in seguito un altro algoritmo risolutivo che per il problema del flusso massimo è più efficiente del simpleso e che fornisce anche una migliore interpretazione del problema nel suo complesso.

## 8.2 Problema del taglio di capacità minima

Le condizioni di ottimalità per il problema del flusso massimo si basano sul concetto di taglio in un grafo.

**Definizione 8.2.1.** (Taglio)

Un taglio  $(N_s, N_t)$  è una partizione dell'insieme  $N$  dei nodi in due sottoinsiemi, cioè

$$N = N_s \cup N_t, \quad \text{e} \quad N_s \cap N_t = \emptyset,$$

Un taglio  $(N_s, N_t)$  si dice ammissibile se  $N_s$  contiene almeno l'origine  $s$  e  $N_t$  contiene almeno la destinazione  $t$ . Gli archi diretti e inversi del taglio  $(N_s, N_t)$  sono così definiti:

$$\begin{aligned} A^+ &= \{(i, j) \in A : i \in N_s, j \in N_t\} && \text{archi diretti,} \\ A^- &= \{(i, j) \in A : i \in N_t, j \in N_s\} && \text{archi inversi.} \end{aligned}$$

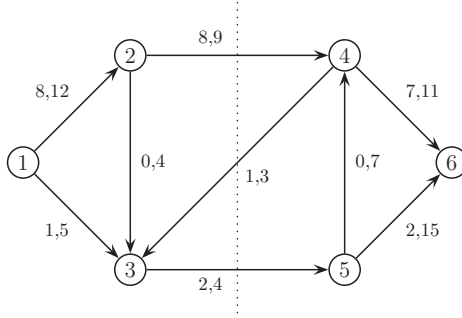
La capacità del taglio  $(N_s, N_t)$  è definita come la somma delle capacità degli archi diretti del taglio:

$$u(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij}. \quad (\text{capacità del taglio})$$

Dato un flusso  $x$ , il valore del flusso sul taglio  $(N_s, N_t)$  è definito come la differenza tra la somma dei flussi sugli archi diretti e la somma dei flussi sugli archi inversi:

$$x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-} x_{ij}. \quad (\text{flusso sul taglio})$$

Ad esempio, consideriamo il grafo seguente in cui sugli archi sono indicati, nell'ordine, il flusso e la capacità:



Il taglio ammissibile  $(N_s, N_t)$  indicato in figura è  $N_s = \{1, 2, 3\}$ ,  $N_t = \{4, 5, 6\}$ , gli archi diretti e inversi del taglio sono rispettivamente  $A^+ = \{(2, 4), (3, 5)\}$  e  $A^- = \{(4, 3)\}$ , la capacità del taglio è

$$u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{35} = 9 + 4 = 13,$$

mentre il valore del flusso sul taglio è

$$x(N_s, N_t) = x_{24} + x_{35} - x_{43} = 8 + 2 - 1 = 9.$$

Dimostriamo un'importante relazione che lega il flusso e la capacità di un qualunque taglio.



## 8.2 PROBLEMA DEL TAGLIO DI CAPACITÀ MINIMA

**Lemma 8.2.1.** *Se  $x$  è un flusso ammissibile e  $(N_s, N_t)$  è un taglio ammissibile, allora*

$$v = x(N_s, N_t) \leq u(N_s, N_t).$$

**Dimostrazione.** Prima dimostriamo che il valore  $v$  del flusso è uguale al valore del flusso sul taglio  $(N_s, N_t)$ . Consideriamo i vincoli di bilancio relativi ai nodi dell'insieme  $N_t$ , cioè

$$E_i x = b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq t \\ v & \text{se } i = t \end{cases} \quad i \in N_t$$

Sommando tali equazioni si ottiene

$$\sum_{i \in N_t} E_i x = v.$$

D'altra parte, consideriamo la matrice costituita dalle righe  $E_i$  per  $i \in N_t$  e dividiamola in 4 blocchi di colonne: uno relativo agli archi che connettono nodi di  $N_s$ , uno relativo agli archi che connettono nodi di  $N_t$ , uno relativo agli archi diretti  $A^+$  del taglio e l'ultimo relativo agli archi inversi  $A^-$  del taglio. Allora si ha:

$$\sum_{i \in N_t} E_i x = \sum_{(i,j) \in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-} x_{ij} = x(N_s, N_t).$$

Per provare la disuguaglianza tra il flusso sul taglio e la capacità del taglio, basta osservare che  $x$  è ammissibile e quindi rispetta i vincoli di capacità  $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ , infatti si ottiene:

$$x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} x_{ij} - \underbrace{\sum_{(i,j) \in A^-} x_{ij}}_{\geq 0} \leq \sum_{(i,j) \in A^+} x_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij} = u(N_s, N_t).$$

Una dimostrazione alternativa della disuguaglianza  $v \leq u(N_s, N_t)$  deriva del teorema della dualità debole. Il problema duale del flusso massimo (che viene chiamato problema del taglio di capacità minima) è dato da:

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \mu_{ij} \\ \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \\ \pi_t - \pi_s = 1 \\ \mu \geq 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Al taglio ammissibile  $(N_s, N_t)$  si può associare una soluzione ammissibile per il problema (8.2) data da

$$\pi_i = \begin{cases} 0 & i \in N_s \\ 1 & i \in N_t \end{cases} \quad \mu_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in A^+ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il valore che la funzione obiettivo del problema (8.2) assume nel punto  $(\pi, \mu)$  coincide con la capacità del taglio  $(N_s, N_t)$ :

$$\sum_{(i,j) \in A} \mu_{ij} u_{ij} = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij} = u(N_s, N_t).$$

Per il teorema della dualità debole applicato al problema di flusso massimo e al suo duale otteniamo la tesi:  $v \leq u(N_s, N_t)$ .  $\square$

Dal Lemma 8.2.1 segue direttamente il seguente teorema.

**Teorema 8.2.1.** (Max flow – min cut)

Se esistono un flusso ammissibile  $x$  ed un taglio ammissibile  $(N_s, N_t)$  tali che

$$x(N_s, N_t) = u(N_s, N_t),$$

allora  $x$  è un flusso di valore massimo e  $(N_s, N_t)$  è un taglio di capacità minima.

## 8.3 Algoritmo di Ford–Fulkerson

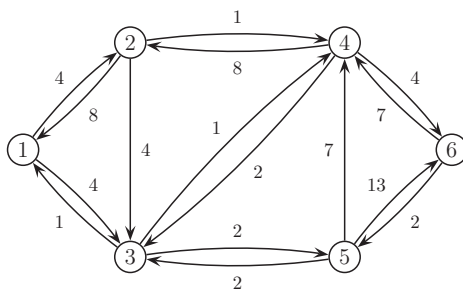
Sul teorema *max flow – min cut* si basa l'algoritmo di Ford–Fulkerson. Prima di descrivere tale algoritmo è necessario definire il grafo residuo.

**Definizione 8.3.1.** (Grafo residuo)

Dato un flusso  $x$  ammissibile, il grafo residuo (relativo a  $x$ ) è un grafo  $G(x) = (N, A(x))$  con gli stessi nodi del grafo  $G$ , mentre gli archi e le loro capacità  $r_{ij}$ , dette residue, sono così definiti:

$$\begin{aligned} (i, j) \in A, \quad x_{ij} < u_{ij} &\implies (i, j) \in A(x), \quad r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}, \\ (i, j) \in A, \quad x_{ij} > 0 &\implies (j, i) \in A(x), \quad r_{ji} = x_{ij} \end{aligned}$$

Ad esempio, per il grafo a pag. 192 il grafo residuo (con capacità residue indicate sugli archi) è il seguente:



Un altro concetto su cui si basa l'algoritmo di Ford–Fulkerson è quello di cammino aumentante.

**Definizione 8.3.2.** (Cammino aumentante)

Dato un flusso  $x$  ammissibile, un cammino aumentante (rispetto a  $x$ ) è un cammino orientato da  $s$  a  $t$  nel grafo residuo  $G(x)$ .

Un cammino aumentante può essere non orientato nel grafo di partenza, ad esempio nel grafo residuo precedente il cammino 1–3–4–6 è un cammino aumentante, ma non è un cammino orientato sul grafo di pag. 192.

L'algoritmo di Ford–Fulkerson cerca ad ogni iterazione un cammino aumentante rispetto al flusso corrente. Se esiste un cammino aumentante, allora il flusso viene aggiornato

### 8.3 ALGORITMO DI FORD–FULKERSON

spedendo su tale cammino il massimo flusso possibile pari alla minima capacità residua degli archi che formano il cammino. Se non esistono cammini aumentanti, allora il flusso corrente è di valore massimo e l'algoritmo trova anche un taglio di capacità minima.

#### Algoritmo di Ford–Fulkerson

```
Poni  $x := 0$ ,  $G(x) := G$ .
while esiste un cammino aumentante  $\mathcal{C}$  do
  calcola  $\delta := \min\{r_{ij} : (i, j) \in \mathcal{C}\}$ 
  per ogni arco  $(i, j) \in A$ :
    if  $(i, j) \in \mathcal{C}$  then  $x_{ij} := x_{ij} + \delta$ 
    if  $(j, i) \in \mathcal{C}$  then  $x_{ij} := x_{ij} - \delta$ 
  Costruisci il grafo residuo  $G(x)$ 
```

**Teorema 8.3.1.** *Se  $u_{ij} \in \mathbb{Z}$  per ogni  $(i, j) \in A$ , allora l'algoritmo di Ford–Fulkerson trova un flusso massimo ed un taglio di capacità minima in un numero finito di iterazioni.*

**Dimostrazione.** Dall'interezza delle  $u_{ij}$  segue che il valore massimo del flusso deve essere finito, inoltre ad ogni iterazione anche le capacità residue  $r_{ij}$  del grafo residuo devono essere intere e quindi anche  $\delta$ . Pertanto ad ogni iterazione il valore del flusso aumenta di un intero positivo e quindi l'algoritmo si deve fermare dopo un numero finito di iterazioni.

Se ad un certo passo non esistono cammini aumentanti, cioè nel grafo residuo non esistono cammini orientati da  $s$  a  $t$ , allora l'insieme

$$N_s = \{i \in N : \text{esiste un cammino orientato da } s \text{ a } i \text{ in } G(x)\}$$

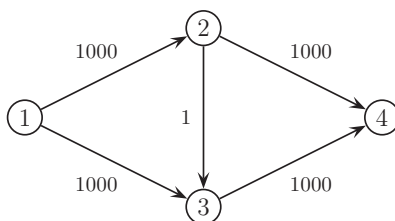
non contiene la destinazione  $t$ . Perciò il taglio  $(N_s, N_t)$ , con  $N_t = N \setminus N_s$ , è tale per cui non esistono archi diretti nel grafo residuo. Questo significa che nel grafo  $G$ , per ogni arco diretto  $(i, j) \in A^+$  si ha  $x_{ij} = u_{ij}$ , cioè l'arco è saturo, mentre per ogni arco inverso  $(i, j) \in A^-$  si ha  $x_{ij} = 0$ , cioè l'arco è vuoto, pertanto

$$x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-} x_{ij} = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij} = u(N_s, N_t),$$

cioè il flusso sul taglio  $(N_s, N_t)$  coincide con la capacità del taglio. Dal Teorema max flow – min cut segue che il flusso è di valore massimo e che il taglio è di capacità minima.  $\square$

In questa versione generale, l'algoritmo di Ford–Fulkerson ha complessità  $O(mU)$ , dove  $U = n \max_{(i,j) \in A} u_{ij}$ . Infatti l'algoritmo per la ricerca di un cammino aumentante, essendo una visita del grafo, ha complessità  $O(m)$  e poiché ad ogni iterazione il flusso cresce di almeno una unità l'algoritmo termina al più dopo  $U$  iterazioni. Se non abbiamo regole precise per scegliere i cammini aumentanti, la convergenza dell'algoritmo può risultare molto lenta. Consideriamo, ad esempio, il problema del flusso massimo sul seguente grafo:

## 8. FLUSSO MASSIMO



Possiamo risolvere il problema applicando l'algoritmo di Ford–Fulkerson in cui alla prima iterazione scegliamo il cammino aumentante 1–2–3–4, sul quale possiamo spedire al massimo 1 unità di flusso. Alla seconda iterazione scegliamo il cammino aumentante 1–3–2–4, sul quale possiamo spedire ancora 1 sola unità di flusso. Proseguendo in questo modo, troviamo il flusso massimo (di valore 2000) dopo 2000 iterazioni.

C'è una variante dell'algoritmo di Ford–Fulkerson, dovuta ad Edmonds–Karp, in cui tra tutti i possibili cammini aumentanti si sceglie quello col minimo numero di archi. Si può dimostrare che tale variante ha complessità polinomiale pari a  $O(nm^2)$ .

Descriviamo ora l'algoritmo di Edmonds–Karp per la ricerca del cammino aumentante. Se nel grafo residuo  $G(x)$  esiste almeno un cammino orientato da  $s$  a  $t$ , tale algoritmo trova in  $G(x)$  un cammino da  $s$  a  $t$  con il minimo numero di archi, altrimenti trova un taglio di capacità minima. L'algoritmo è una visita a ventaglio del grafo residuo a partire dall'origine  $s$  e fa uso dell'insieme  $Q$  dei nodi raggiunti nell'esplorazione del grafo e del vettore  $p$  dei predecessori (i nodi non ancora raggiunti hanno predecessore uguale a  $-1$ ). L'insieme  $Q$  rappresenta una fila i cui elementi vengono esaminati in ordine *first-in first-out*, cioè si estraggono dalla testa e si aggiungono in coda. Si parte con  $Q$  che contiene solo l'origine  $s$ . Ad ogni passo si estrae il *primo* nodo di  $Q$ , diciamo  $i$ , si esaminano gli archi uscenti dal nodo  $i$  in ordine lessicografico e si aggiungono *in fondo* a  $Q$  tutti i nodi collegati al nodo  $i$  che non sono ancora stati raggiunti. L'algoritmo termina in due casi: o quando il nodo  $t$  entra in  $Q$ , oppure quando  $Q$  si svuota. Nel primo caso l'algoritmo fornisce un cammino aumentante dato dal vettore  $p$  dei predecessori, nel secondo caso non esiste un cammino aumentante e l'algoritmo fornisce un taglio di capacità minima  $(N_s, N_t)$  dato da:

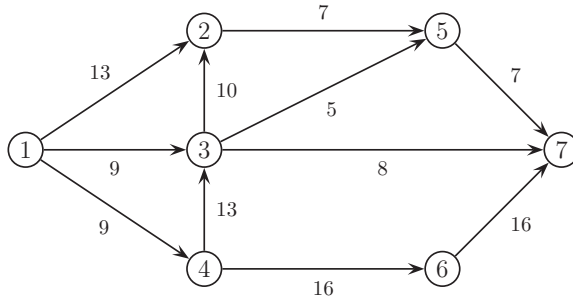
$$N_s = \{i \in N : p_i \neq -1\} \quad N_t = \{i \in N : p_i = -1\},$$

cioè  $N_s$  è costituito dai nodi raggiungibili da  $s$  con un cammino orientato nel grafo residuo, mentre  $N_t$  dagli altri nodi.

## Algoritmo di Edmonds-Karp

1. Poni  $p_i := \begin{cases} -1 & \text{se } i \neq s \\ 0 & \text{se } i = s \end{cases}$ ,  $Q := [s]$
2. **if**  $Q = \emptyset$  **then** STOP ( $p$  fornisce un taglio di capacità minima).  
**else** estrai il primo elemento  $i$  di  $Q$ .
3. **if**  $(i, t) \in A(x)$  **then**  $p_t := i$ , STOP ( $p$  fornisce un cammino aumentante).
4. In  $G(x)$  analizza gli archi uscenti da  $i$  in ordine lessicografico  
 Per ogni  $(i, j) \in A(x)$ :  
**if**  $p_j := -1$  **then**  $p_j := i$ , aggiungi  $j$  in fondo a  $Q$ .  
 Torna al passo 2.

**Esempio 8.3.1.** Risolviamo il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sul grafo seguente con l'algoritmo di Ford-Fulkerson utilizzando l'algoritmo di Edmonds-Karp per la ricerca di un cammino aumentante.



**1° iterazione.** Partiamo con il flusso  $x$  nullo su tutti gli archi e quindi il grafo residuo  $G(x)$  coincide con il grafo di partenza. Appliciamo ora l'algoritmo di Edmonds-Karp per trovare un cammino aumentante. Inizializziamo  $Q = [1]$  ed il vettore dei predecessori  $p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$ . Si estrae il primo (in questo caso unico) elemento di  $Q$ , cioè il nodo 1, e si considera la stella uscente dal nodo 1 formata dagli archi  $(1,2)$ ,  $(1,3)$  e  $(1,4)$ . Poiché i nodi 2, 3 e 4 hanno il predecessore uguale a  $-1$ , cioè non sono stati ancora raggiunti da un cammino orientato che parte dall'origine 1, assegnamo loro il nodo 1 come predecessore e li inseriamo in coda a  $Q$ , quindi si ottiene

$$Q = [2 \ 3 \ 4] \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

## 8. FLUSSO MASSIMO

A questo punto si estrae il primo elemento di  $Q$ , cioè il nodo 2. C'è un solo arco uscente dal nodo 2, l'arco (2,5). Anche in questo caso il nodo 5 ha predecessore uguale a  $-1$ , quindi cambiamo il suo predecessore in 2 e inseriamo il nodo 5 in fondo a  $Q$ :

$$Q = \boxed{3 \mid 4 \mid 5} \quad p = (0, 1, 1, 1, 2, -1, -1).$$

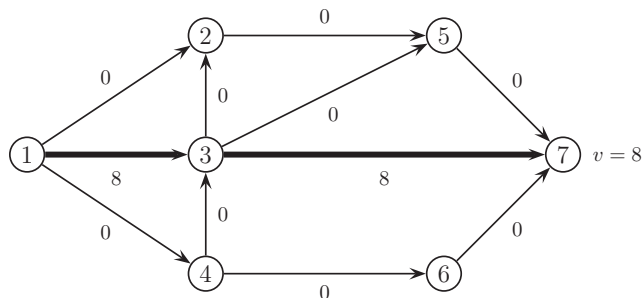
Selezioniamo il nodo 3. Gli archi uscenti dal nodo 3 sono (3,2), (3,5) e (3,7). Poiché possiamo raggiungere la destinazione 7 dal nodo 3, poniamo  $p_7 = 3$  e l'algoritmo si ferma. Il cammino aumentante lo ricaviamo dal vettore dei predecessori

$$p = (0, 1, 1, 1, 2, -1, 3).$$

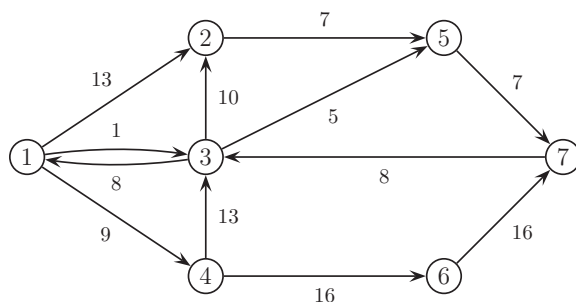
Partiamo dalla destinazione 7, passiamo al suo predecessore  $p_7 = 3$  e torniamo ancora indietro al predecessore del nodo 3, cioè  $p_3 = 1$ , quindi il cammino aumentante è 1-3-7. Per trovare la quantità di flusso  $\delta$  da spedire lungo il cammino aumentante, osserviamo che le capacità residue degli archi che formano tale cammino sono:

$$r_{13} = 9, \quad r_{37} = 8,$$

per cui  $\delta = \min\{9, 8\} = 8$ . Aggiorniamo il flusso spedendo 8 unità lungo il cammino 1-3-7:



**2° iterazione.** Il grafo residuo diventa:



### 8.3 ALGORITMO DI FORD-FULKERSON

Applichiamo l'algoritmo di Edmonds-Karp e partiamo con

$$Q = \boxed{1} \quad \text{e} \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo gli archi uscenti dal nodo 1 sono (1,2), (1,3) e (1,4) ed i nodi 2, 3 e 4 non sono stati ancora raggiunti nella visita del grafo, cioè hanno predecessore uguale a  $-1$ , perciò

$$Q = \boxed{2 \mid 3 \mid 4} \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 2. L'unico arco uscente dal nodo 2 è (2,5) ed il nodo 5 non è stato raggiunto, quindi lo inseriamo in fondo a  $Q$  e poniamo  $p_5 = 2$ :

$$Q = \boxed{3 \mid 4 \mid 5} \quad p = (0, 1, 1, 1, 2, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3. Gli archi uscenti dal nodo 3, stavolta, sono (3,1), (3,2) e (3,5) (l'arco (3,7) si è saturato alla prima iterazione per cui non può comparire nel grafo residuo corrente). I nodi 1, 2 e 5 sono stati già raggiunti nella visita, infatti  $p_2 = 1$  e  $p_5 = 2$ , e quindi non possiamo inserire nessun nodo in  $Q$  che diventa

$$Q = \boxed{4 \mid 5}$$

Selezioniamo il nodo 4, la sua stella uscente è formata da (4,3) e (4,6). Il nodo 3 è già stato raggiunto, ma il nodo 6 non ancora, per cui si ha

$$Q = \boxed{5 \mid 6} \quad p = (0, 1, 1, 1, 2, 4, -1).$$

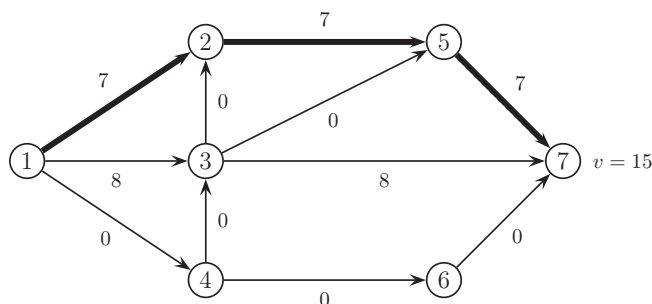
Selezioniamo il nodo 5. L'unico arco uscente dal nodo 5 è (5,7) e quindi abbiamo raggiunto la destinazione 7. Poniamo  $p_7 = 5$  e l'algoritmo termina. Il cammino aumentante è dato da:

$$p_7 = 5, \quad p_5 = 2, \quad p_2 = 1,$$

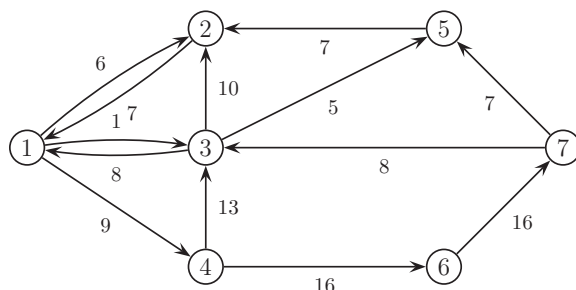
cioè 1-2-5-7. Per trovare  $\delta$  calcoliamo le capacità residue degli archi che formano il cammino aumentante:

$$r_{12} = 13 \quad r_{25} = 7 \quad r_{57} = 7,$$

quindi  $\delta = 7$ . Aggiorniamo il flusso spendendo 7 unità lungo il cammino 1-2-5-7:



**3° iterazione.** Il grafo residuo diventa:



Cerchiamo un altro cammino aumentante con l'algoritmo di Edmonds–Karp. Inizializziamo

$$Q = \boxed{1} \quad \text{e} \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo gli archi uscenti dal nodo 1 sono sempre  $(1,2)$ ,  $(1,3)$  e  $(1,4)$  ed i nodi 2, 3 e 4 non sono stati ancora raggiunti nella visita, perciò

$$Q = \boxed{2 \mid 3 \mid 4} \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Si estrae il nodo 2. L'unico arco uscente dal nodo 2 è  $(2,1)$  (l'arco  $(2,5)$  si è saturato alla precedente iterazione) ed il nodo 1 è il nodo origine:

$$Q = \boxed{3 \mid 4} \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3: gli archi uscenti dal nodo 3 sono  $(3,1)$ ,  $(3,2)$  e  $(3,5)$ . I nodi 1 e 2 sono già stati raggiunti nella visita, ma il nodo 5 non ancora, per cui 5 si inserisce in fondo a  $Q$  e si pone  $p_5 = 3$ , ottenendo:

$$Q = \boxed{4 \mid 5} \quad p = (0, 1, 1, 1, 3, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 4. La stella uscente dal nodo 4 è  $(4,3)$  e  $(4,6)$ , quindi inseriamo in fondo a  $Q$  solo il nodo 6 (il nodo 3 è già stato raggiunto) e poniamo  $p_6 = 4$ :

$$Q = \boxed{5 \mid 6} \quad p = (0, 1, 1, 1, 3, 4, -1).$$

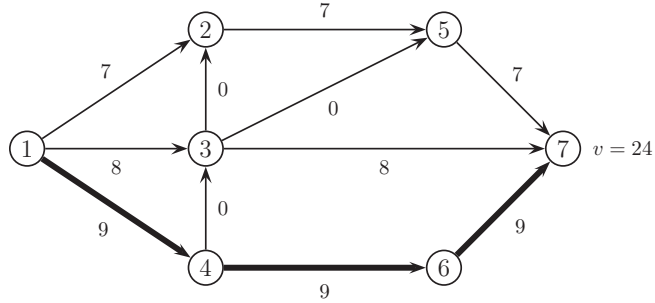
Selezioniamo il nodo 5. L'unico arco uscente dal nodo 5 è  $(5,2)$ , ma il nodo 2 è già stato raggiunto, per cui otteniamo  $Q = \boxed{6}$ . Selezionando il nodo 6, abbiamo l'arco  $(6,7)$ , quindi poniamo  $p_7 = 6$  e ci fermiamo. Il cammino aumentante è:

$$p_7 = 6, \quad p_6 = 4, \quad p_4 = 1,$$

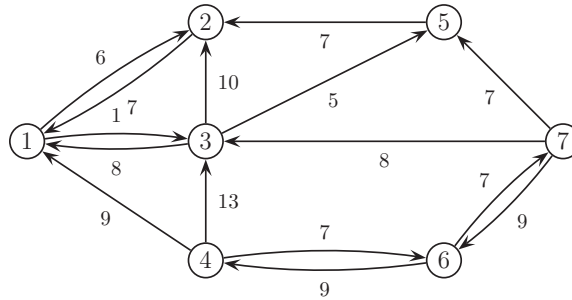
cioè  $1-4-6-7$  con  $\delta = \min\{9, 16, 16\} = 9$ . Aggiorniamo il flusso spedendo 9 unità lungo il cammino  $1-4-6-7$ :



### 8.3 ALGORITMO DI FORD-FULKERSON



**4° iterazione.** Il grafo residuo diventa:



Cerchiamo un altro cammino aumentante con l'algoritmo di Edmonds-Karp. Inizializziamo

$$Q = \boxed{1} \quad e \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo gli archi uscenti dal nodo 1 sono (1,2) e (1,3) (l'arco (1,4) si è saturato alla precedente iterazione) ed i nodi 2, 3 e 4 non sono stati ancora raggiunti nella visita, perciò

$$Q = \boxed{2} \boxed{3} \quad p = (0, 1, 1, -1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 2. L'unico arco uscente dal nodo 2 è (2,1) ed il nodo 1 è il nodo origine, quindi:

$$Q = \boxed{3} \quad p = (0, 1, 1, -1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3: gli archi uscenti dal nodo 3 sono (3,1), (3,2) e (3,5). I nodi 1 e 2 sono già stati raggiunti nella visita, ma il nodo 5 non ancora, per cui 5 si inserisce in fondo a  $Q$  e si pone  $p_5 = 3$ , ottenendo:

$$Q = \boxed{5} \quad p = (0, 1, 1, -1, 3, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 5. L'unico arco uscente dal nodo 5 è (5,2), ma il nodo 2 è già stato raggiunto, quindi  $Q$  diventa vuoto:

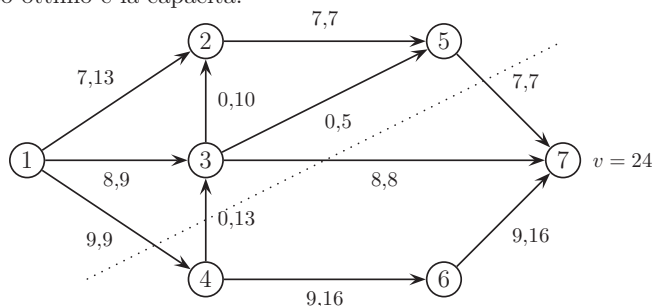
$$Q = \emptyset \quad p = (0, 1, 1, -1, 3, -1, -1).$$

## 8. FLUSSO MASSIMO

L'algoritmo si ferma senza aver trovato un cammino aumentante, questo significa che l'ultimo flusso che abbiamo trovato è ottimo. Inoltre l'algoritmo di Edmonds–Karp fornisce anche un taglio  $(N_s, N_t)$  di capacità minima, inserendo in  $N_s$  tutti i nodi raggiunti nella visita del grafo ed in  $N_t$  quelli non raggiunti, cioè

$$N_s = \{1, 2, 3, 5\} \quad N_t = \{4, 6, 7\}.$$

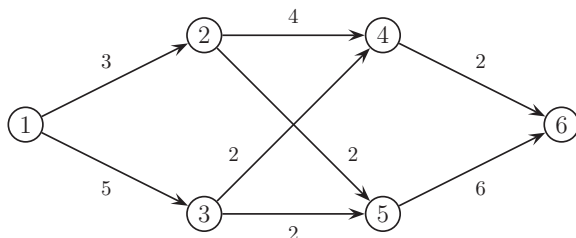
Nel grafo seguente è rappresentato il taglio di capacità minima e su ogni arco sono indicati il flusso ottimo e la capacità:



Osserviamo che gli archi diretti del taglio  $(1,4)$ ,  $(3,7)$  e  $(5,7)$  sono saturi, mentre l'arco inverso  $(4,3)$  è vuoto ed inoltre che il taglio ha capacità 24 uguale al valore del flusso massimo.

□

**Esempio 8.3.2.** Risolviamo il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sul grafo seguente con l'algoritmo di Ford–Fulkerson utilizzando l'algoritmo di Edmonds–Karp per la ricerca di un cammino aumentante.



**1° iterazione.** Partiamo con il flusso  $x$  nullo su tutti gli archi e quindi il grafo residuo  $G(x)$  coincide con il grafo di partenza. Applichiamo ora l'algoritmo di Edmonds–Karp per trovare un cammino aumentante. Inizializziamo  $Q = \boxed{1}$  ed il vettore dei predecessori  $p = (0, -1, -1, -1, -1, -1)$ . Si estrae da  $Q$  il nodo 1 e si considera la

### 8.3 ALGORITMO DI FORD-FULKERSON

stella uscente dal nodo 1 formata dagli archi (1,2) e (1,3). Poiché i nodi 2 e 3 hanno il predecessore uguale a  $-1$ , cioè non sono stati ancora raggiunti nella visita del grafo, assegnamo loro il nodo 1 come predecessore e li inseriamo in coda a  $Q$ , quindi si ottiene

$$Q = \boxed{2 \mid 3} \quad p = (0, 1, 1, -1, -1, -1).$$

A questo punto selezioniamo il primo elemento di  $Q$ , cioè il nodo 2. Gli archi uscenti dal nodo 2 sono (2,4) e (2,5). Anche in questo caso i nodi 4 e 5 hanno predecessore uguale a  $-1$ , quindi cambiamo il loro predecessore in 2 e li inseriamo in fondo a  $Q$ :

$$Q = \boxed{3 \mid 4 \mid 5} \quad p = (0, 1, 1, 2, 2, -1).$$

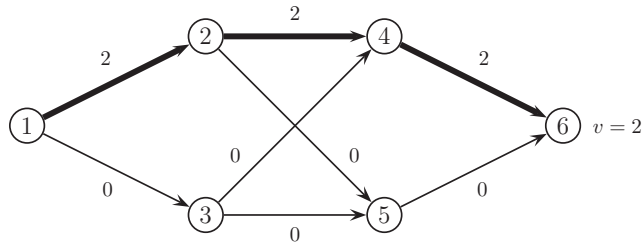
Selezioniamo il nodo 3. Gli archi uscenti dal nodo 3 sono (3,4) e (3,5). I nodi 4 e 5 sono già stati raggiunti nella visita, per cui selezioniamo il nodo 4. Poiché possiamo raggiungere la destinazione 6 dal nodo 4, poniamo  $p_6 = 4$  e l'algoritmo si ferma. Il cammino aumentante lo ricaviamo dal vettore dei predecessori  $p = (0, 1, 1, 2, 2, 4)$ :

$$p_6 = 4, \quad p_4 = 2, \quad p_2 = 1,$$

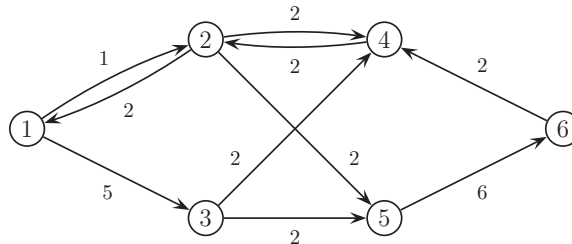
quindi il cammino aumentante è 1-2-4-6. Per trovare la quantità di flusso  $\delta$  da spedire lungo il cammino aumentante, osserviamo che le capacità residue degli archi che formano tale cammino sono:

$$r_{12} = 3, \quad r_{24} = 4, \quad r_{46} = 2,$$

per cui  $\delta = \min\{3, 4, 2\} = 2$ . Aggiorniamo il flusso spedendo 2 unità lungo il cammino 1-2-4-6:



**2° iterazione.** Il grafo residuo diventa:



## 8. FLUSSO MASSIMO

Cerchiamo un altro cammino aumentante con l'algoritmo di Edmonds–Karp. Inizializziamo

$$Q = \boxed{1} \quad \text{e} \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo gli archi uscenti dal nodo 1 sono sempre (1,2) e (1,3) ed i nodi 2 e 3 non sono stati ancora raggiunti nella visita, perciò

$$Q = \boxed{2 \mid 3} \quad p = (0, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 2. Gli archi uscenti dal nodo 2 sono (2,1), (2,4) e (2,5). Il nodo 1 è il nodo origine, mentre i nodi 4 e 5 non sono stati ancora raggiunti, cambiamo il loro predecessore in 2 e li inseriamo in fondo a  $Q$ :

$$Q = \boxed{3 \mid 4 \mid 5} \quad p = (0, 1, 1, 2, 2, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3: gli archi uscenti dal nodo 3 sono (3,4) e (3,5), ma i nodi 4 e 5 sono già stati raggiunti nella visita, quindi:

$$Q = \boxed{4 \mid 5} \quad p = (0, 1, 1, 2, 2, -1).$$

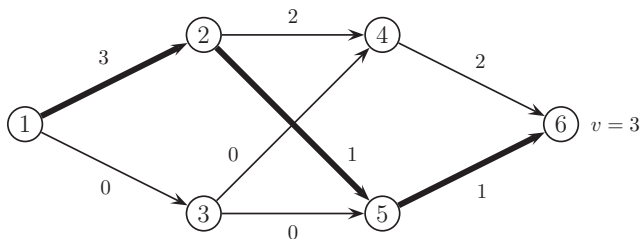
Selezioniamo il nodo 4. L'unico arco uscente dal nodo 4 è (4,2), ma il nodo è già stato visitato, quindi otteniamo:

$$Q = \boxed{5} \quad p = (0, 1, 1, 2, 2, -1).$$

Selezioniamo il nodo 5. L'unico arco uscente dal nodo 5 è (5,6), quindi abbiamo raggiunto la destinazione 6, poniamo  $p_6 = 5$  e ci fermiamo. Il cammino aumentante è:

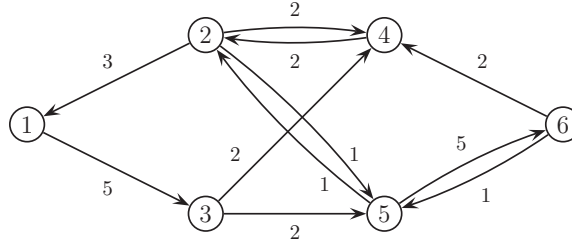
$$p_6 = 5, \quad p_5 = 2, \quad p_2 = 1,$$

cioè 1–2–5–6 con  $\delta = \min\{1, 2, 6\} = 1$ . Aggiorniamo il flusso spedendo 1 unità lungo il cammino 1–2–5–6:



**3° iterazione.** Il grafo residuo diventa:

### 8.3 ALGORITMO DI FORD-FULKERSON



Cerchiamo un altro cammino aumentante con l'algoritmo di Edmonds-Karp. Inizializziamo

$$Q = [1] \quad \text{e} \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo l'unico arco uscente dal nodo 1 è (1,3). Il nodo 3 non è stato ancora raggiunto nella visita, perciò

$$Q = [3] \quad p = (0, -1, 1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3. Gli archi uscenti dal nodo 3 sono (3,4) e (3,5). I nodi 4 e 5 non sono stati ancora raggiunti, cambiamo il loro predecessore in 3 e li inseriamo in fondo a  $Q$ :

$$Q = [4 \mid 5] \quad p = (0, -1, 1, 3, 3, -1).$$

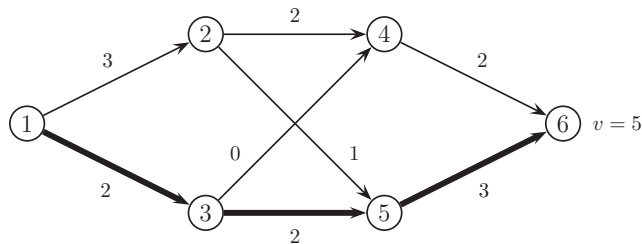
Selezioniamo il nodo 4: l'arco uscente dal nodo 4 è (4,2) ed il nodo 2 non è stato raggiunto, quindi  $p_2 = 4$  e inseriamo 2 in fondo a  $Q$ :

$$Q = [5 \mid 2] \quad p = (0, 4, 1, 3, 3, -1).$$

Selezioniamo il nodo 5. La stella uscente dal nodo 5 è formata da (5,2) e (5,6). Poiché abbiamo raggiunto la destinazione 6, poniamo  $p_6 = 5$  e ci fermiamo. Il cammino aumentante è:

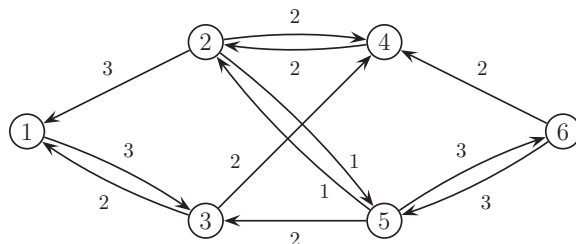
$$p_6 = 5, \quad p_5 = 3, \quad p_3 = 1,$$

cioè 1-3-5-6 con  $\delta = \min\{5, 2, 5\} = 2$ . Aggiorniamo il flusso spendendo 2 unità lungo il cammino 1-3-5-6:



**4° iterazione.** Il grafo residuo diventa:

# 8. FLUSSO MASSIMO



Cerchiamo un altro cammino aumentante con l'algoritmo di Edmonds–Karp. Inizializziamo

$$Q = \boxed{1} \quad \text{e} \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo l'unico arco uscente dal nodo 1 è (1,3). Il nodo 3 non è stato ancora raggiunto nella visita, perciò

$$Q = \boxed{3} \quad p = (0, -1, 1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3. L'arco uscente dal nodo 3 è (3,4). Il nodo 4 non è stato ancora raggiunto, cambiamo il suo predecessore in 3 e lo inseriamo in  $Q$ :

$$Q = \boxed{4} \quad p = (0, -1, 1, 3, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 4: l'arco uscente dal nodo 4 è (4,2) ed il nodo 2 non è stato raggiunto, quindi  $p_2 = 4$  e inseriamo 2 in  $Q$ :

$$Q = \boxed{2} \quad p = (0, 4, 1, 3, -1, -1).$$

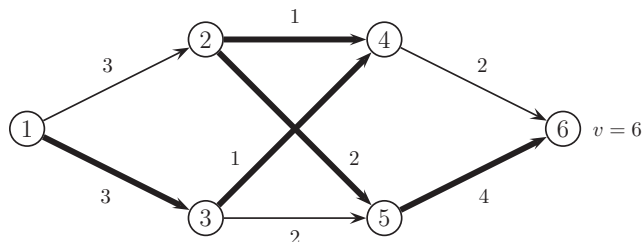
Selezioniamo il nodo 2. La stella uscente dal nodo 2 è formata da (2,1), (2,4) e (2,5). I nodi 1 e 4 sono stati raggiunti, ma il nodo 5 non ancora, quindi:

$$Q = \boxed{5} \quad p = (0, 4, 1, 3, 2, -1).$$

Selezioniamo il nodo 5: dal nodo 5 possiamo raggiungere la destinazione 6, quindi poniamo  $p_6 = 5$  e ci fermiamo. Il cammino aumentante è:

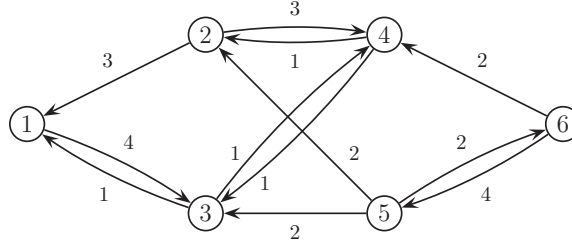
$$p_6 = 5, \quad p_5 = 2, \quad p_2 = 4, \quad p_4 = 3, \quad p_3 = 1,$$

cioè 1–3–4–2–5–6 con  $\delta = \min\{3, 2, 2, 1, 3\} = 1$ . Osserviamo che tale cammino aumentante contiene l'arco fittizio (4,2), ciò significa che il flusso sull'arco (2,4) diminuisce di  $\delta = 1$ . Aggiorniamo il flusso spedendo 1 unità lungo il cammino 1–3–4–2–5–6:



### 8.3 ALGORITMO DI FORD-FULKERSON

**5° iterazione.** Il grafo residuo diventa:



Cerchiamo un altro cammino aumentante con l'algoritmo di Edmonds-Karp. Inizializziamo

$$Q = \boxed{1} \quad \text{e} \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo l'unico arco uscente dal nodo 1 è (1,3). Inseriamo il nodo 3 in  $Q$  e poniamo  $p_3 = 1$ :

$$Q = \boxed{3} \quad p = (0, -1, 1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3. L'unico arco uscente dal nodo 3 è (3,4) ed il nodo 4 non è stato raggiunto nella visita, quindi otteniamo:

$$Q = \boxed{4} \quad p = (0, -1, 1, 3, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 4: gli archi uscenti dal nodo 4 sono (4,2) e (4,3). Il nodo 3 è stato raggiunto, ma il nodo 2 non ancora, quindi si inserisce il nodo 2 in  $Q$  e si pone  $p_2 = 4$ , ottenendo:

$$Q = \boxed{2} \quad p = (0, 4, 1, 3, -1, -1).$$

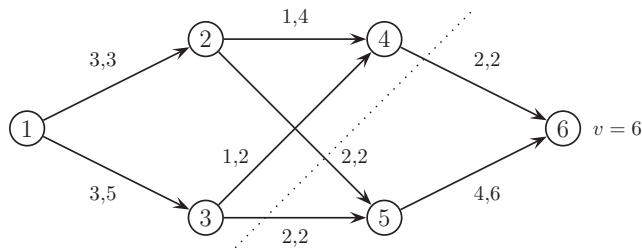
Selezioniamo il nodo 2. La stella uscente dal nodo 2 è data da (2,1) e (2,4), ma i nodi 1 e 4 sono già stati raggiunti, quindi  $Q$  che diventa vuoto:

$$Q = \emptyset \quad p = (0, 4, 1, 3, -1, -1).$$

L'algoritmo si ferma senza aver trovato un cammino aumentante, questo significa che l'ultimo flusso che abbiamo trovato è ottimo. Inoltre un taglio  $(N_s, N_t)$  di capacità minima si ottiene inserendo in  $N_s$  tutti i nodi raggiunti nella visita del grafo ed in  $N_t$  quelli non raggiunti, cioè

$$N_s = \{1, 2, 3, 4\} \quad N_t = \{5, 6\}.$$

Nel grafo seguente è rappresentato il taglio di capacità minima e su ogni arco sono indicati il flusso ottimo e la capacità:



Osserviamo che gli archi diretti del taglio  $(2,5)$ ,  $(3,5)$  e  $(4,6)$  sono saturi ed inoltre che il taglio ha capacità 6 uguale al valore del flusso massimo.

□

### Terminazione dell'algoritmo di Ford–Fulkerson

Abbiamo dimostrato nel Teorema 8.3.1 che se le capacità superiori degli archi sono intere, allora l'algoritmo di Ford–Fulkerson termina dopo un numero finito di iterazioni perché su ogni cammino aumentante si spedisce almeno una unità di flusso. L'algoritmo termina dopo un numero finito di iterazioni anche nel caso in cui le capacità superiori siano razionali, infatti se  $D$  è un denominatore comune a tutte le capacità superiori, allora su ogni cammino aumentante si spediscono almeno  $1/D$  unità di flusso.

Nel caso in cui le capacità superiori siano numeri irrazionali, l'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare dopo un numero finito di iterazioni e può generare un flusso che converge ad un valore strettamente minore di quello ottimo, come dimostra l'esempio che segue.

**Esempio 8.3.3.** Consideriamo la successione geometrica

$$a_n = \sigma^n \quad \text{dove} \quad \sigma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\text{sezione aurea}).$$

È facile osservare che  $\sigma^2 = 1 - \sigma$ . La successione  $\{a_n\}$  ha la seguente proprietà:

$$a_{n+2} = a_n - a_{n+1},$$

infatti

$$a_{n+2} = \sigma^{n+2} = \sigma^n \sigma^2 = \sigma^n (1 - \sigma) = \sigma^n - \sigma^{n+1} = a_n - a_{n+1}.$$

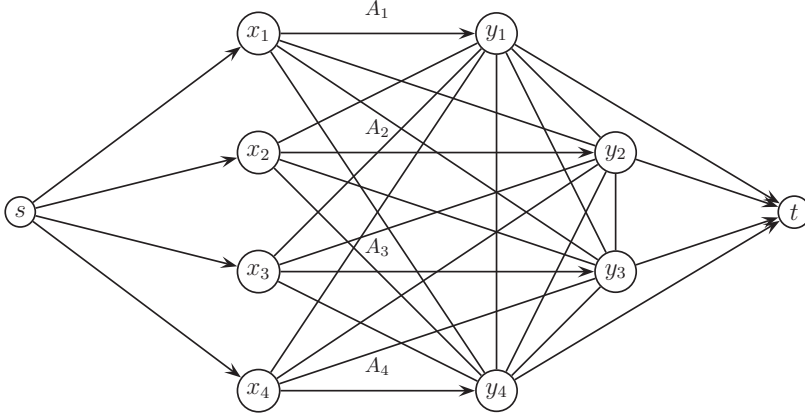
Poiché  $\sigma < 1$ , la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \frac{1}{1 - \sigma}.$$

Consideriamo ora il problema di flusso massimo da  $s$  a  $t$  sul seguente grafo:



### 8.3 ALGORITMO DI FORD-FULKERSON



Distinguiamo gli archi in due tipi: gli archi *speciali*  $A_i = (x_i, y_i)$  e gli archi non speciali della forma  $(s, x_i)$ ,  $(x_i, y_j)$ ,  $(y_i, x_j)$ ,  $(y_i, y_j)$  e  $(y_i, t)$  con  $i \neq j$ . Le capacità degli archi sono così definite: l'arco  $A_1$  ha capacità  $a_0$ , l'arco  $A_2$  ha capacità  $a_1$ , gli archi  $A_3$  e  $A_4$  hanno capacità  $a_2$ , gli archi non speciali hanno capacità  $1/(1 - \sigma)$ . Applichiamo l'algoritmo di Ford-Fulkerson scegliendo i cammini aumentanti nel modo seguente:

**Iterazione 0:** scegliamo il cammino aumentante  $s - x_1 - y_1 - t$  su cui spediamo flusso  $a_0$ . Le capacità residue degli archi speciali  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$  diventano rispettivamente 0,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_2$ .

**Iterazione  $n \geq 1$ :** Rinominiamo gli archi speciali:  $A'_1$  ha capacità residua 0,  $A'_2$  ha capacità residua  $a_n$ ,  $A'_3$  e  $A'_4$  hanno capacità residue  $a_{n+1}$ . Rinominiamo i nodi in modo che  $A'_i = (x'_i, y'_i)$ .

**Parte (a)** Scegliamo il cammino aumentante

$$s - x'_2 - y'_2 - x'_3 - y'_3 - t$$

sul quale spediamo flusso  $a_{n+1}$ . Le capacità residue degli archi  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $A'_3$  e  $A'_4$  diventano rispettivamente 0,  $a_{n+2}$ , 0 e  $a_{n+1}$  (vedi Figura 8.1).

**Parte (b)** Scegliamo il cammino aumentante

$$s - x'_2 - y'_2 - y'_1 - x'_1 - y'_3 - x'_3 - y'_4 - t$$

sul quale spediamo flusso  $a_{n+2}$ . Le capacità residue degli archi  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $A'_3$  e  $A'_4$  diventano rispettivamente  $a_{n+2}$ , 0,  $a_{n+2}$  e  $a_{n+1}$  (vedi Figura 8.2).

## 8. FLUSSO MASSIMO

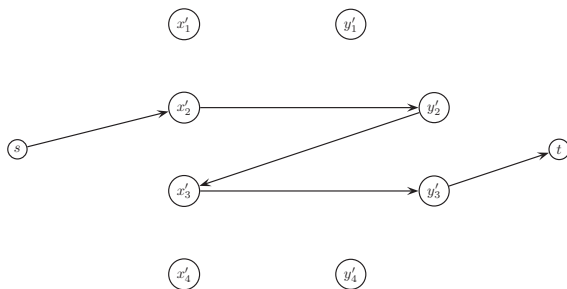


Figura 8.1: parte (a) dell'iterazione  $n$ .

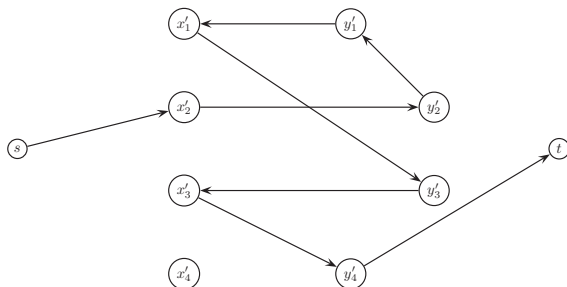


Figura 8.2: parte (b) dell'iterazione  $n$ .

Alla fine dell'iterazione  $n$ , le capacità residue degli archi speciali sono compatibili con l'inizio dell'iterazione  $n + 1$ . Dopo l'iterazione  $n$  il valore flusso aumenta di

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\text{parte (a)}} + \underbrace{a_{n+2}}_{\text{parte (b)}} = a_n.$$

Quindi, per come sono state definite le capacità superiori, l'algoritmo non termina dopo un numero finito di iterazioni. Inoltre il valore del flusso converge alla somma della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1/(1 - \sigma)$ , ma il valore del flusso massimo è  $4/(1 - \sigma)$  che può essere ottenuto con i seguenti 4 cammini aumentanti:

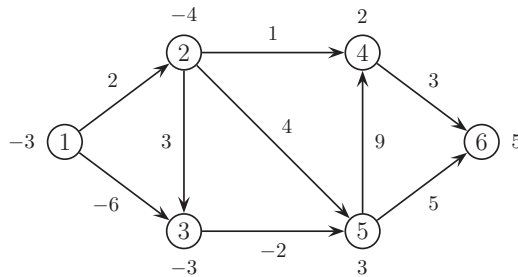
$$\begin{aligned} s - x_1 - y_2 - t & \text{ con flusso } 1/(1 - \sigma) \\ s - x_2 - y_3 - t & \text{ con flusso } 1/(1 - \sigma) \\ s - x_3 - y_4 - t & \text{ con flusso } 1/(1 - \sigma) \\ s - x_4 - y_1 - t & \text{ con flusso } 1/(1 - \sigma) \end{aligned}$$

Il flusso così ottenuto è ottimo perché il suo valore è uguale alla capacità del taglio  $N_s = \{s\}$ ,  $N_t = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, t\}$ .  $\square$

# Capitolo 9

## Esercizi di PL su reti

1. Risolvere il problema di flusso di costo minimo non capacitato sul seguente grafo (sui nodi sono indicati i bilanci e sugli archi i costi):



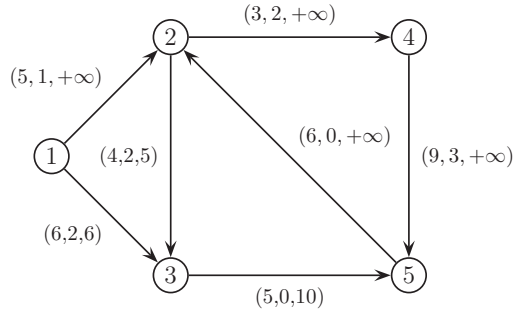
2. Due magazzini producono ciascuno 20 unità di un dato bene che deve essere distribuito a 3 centri di raccolta che necessitano rispettivamente di 15, 15 e 10 unità di tale bene. La matrice dei costi di spostamento dal magazzino  $i$  al centro  $j$  è

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 & 20 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Determinare la quantità di bene che deve essere trasferita dai magazzini ai centri di raccolta minimizzando il costo totale.

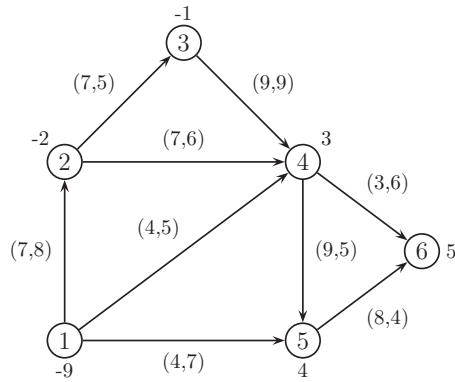
3. Dimostrare che un grafo è connesso se e solo se contiene almeno un albero di copertura.
4. Dato un grafo connesso con  $n$  nodi, dimostrare che ogni albero di copertura contiene esattamente  $n - 1$  archi ed almeno 2 foglie.
5. Trasformare il grafo seguente in un grafo equivalente in cui le capacità inferiori siano nulle e quelle superiori illimitate; su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo, la capacità inferiore e la capacità superiore.

# 9. ESERCIZI DI PL SU RETI



Si determini poi il flusso di costo minimo considerando i bilanci  $(-6, 3, 4, 2, -3)$ .

6. Si consideri il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete. Su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità.



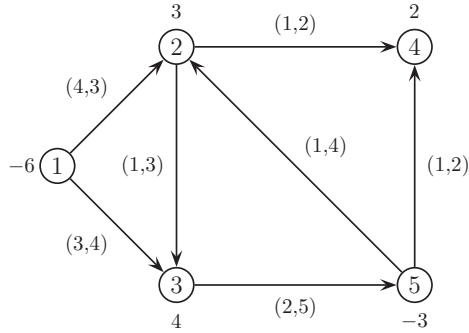
Riempire la tabella:

| Vettore     | $T$  | $U$     | Ammissibile<br>(SI/NO) | Degenera<br>(SI/NO) | Ottimo<br>(SI/NO) |
|-------------|--|---------|------------------------|---------------------|-------------------|
| $x =$       | $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,4 \\ 4,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,4 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ | $(1,4)$ |                        |                     |                   |
| $\pi = (0,$ | $\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,3 \\ 5,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,4 \end{pmatrix}$ | $(4,5)$ |                        |                     |                   |

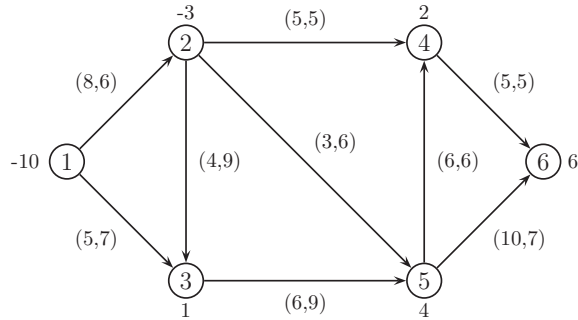
Risolvere il problema con il simplesso per flussi.

# 9. ESERCIZI DI PL SU RETI

7. Illustrare l'algoritmo del simplesso, eseguendone alcuni passi sul seguente grafo: su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità superiore.



8. Si consideri il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete. Su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità.



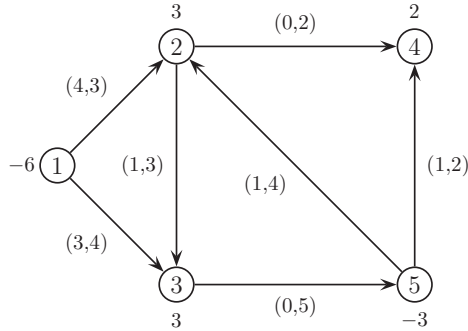
Riempire la tabella:

| Vettore     | $T$                                 | $U$   | Ammissibile<br>(SI/NO) | Degenerare<br>(SI/NO) | Ottimo<br>(SI/NO) |
|-------------|-------------------------------------|-------|------------------------|-----------------------|-------------------|
| $x =$       | (1,3) (2,3)<br>(3,5) (4,6)<br>(5,6) | (2,5) |                        |                       |                   |
| $\pi = (0,$ | (1,2) (1,3)<br>(2,5) (4,6)<br>(5,6) | (2,4) |                        |                       |                   |

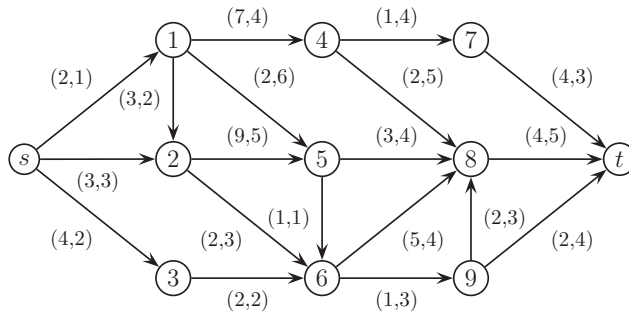
Risolvere il problema con il simplesso per flussi.

# 9. ESERCIZI DI PL SU RETI

9. Si consideri il grafo seguente (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità superiore):

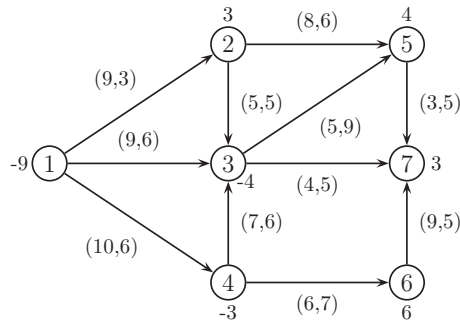


- (a) determinare una base duale ammissibile e la corrispondente soluzione;  
 (b) verificare l'ottimalità della soluzione di base determinata al punto (a).
10. Si determini sul grafo seguente il flusso di costo minimo: su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità superiore, supponiamo che i bilanci siano  $b_s = -3$ ,  $b_t = 3$  e  $b_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, 9$ .



11. Si consideri il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete. Su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità.

9. ESERCIZI DI PL SU RETI

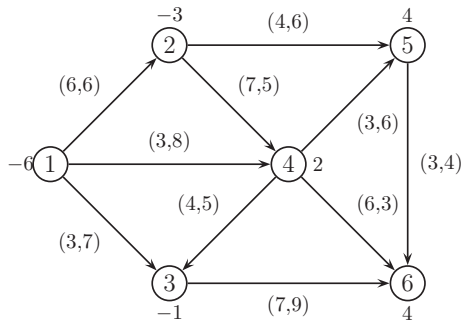


Riempire la tabella:

| Vettore     | $T$                                       | $U$   | Ammissibile<br>(SI/NO) | Degenera<br>(SI/NO) | Ottimo<br>(SI/NO) |
|-------------|---|-------|------------------------|---------------------|-------------------|
| $x =$       | (1,2) (1,3)<br>(1,4) (3,5)<br>(4,6) (6,7) | (3,7) |                        |                     |                   |
| $\pi = (0,$ | (1,4) (2,5)<br>(3,5) (4,3)<br>(4,6) (5,7) | (1,2) |                        |                     |                   |

Risolvere il problema con il semplice per flussi.

12. Si consideri il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete. Su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità.



Riempire la tabella:

9. ESERCIZI DI PL SU RETI

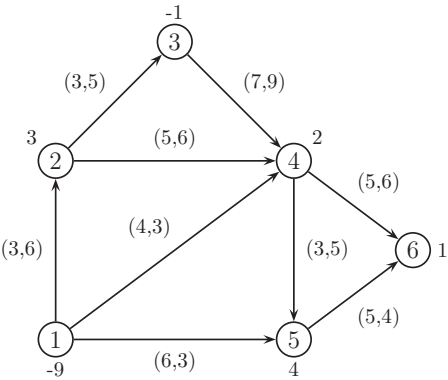
| Vettore     | $T$                                 | $U$   | Ammissibile<br>(SI/NO) | Degenerare<br>(SI/NO) | Ottimo<br>(SI/NO) |
|-------------|-------------------------------------|-------|------------------------|-----------------------|-------------------|
| $x =$       | (1,4) (2,4)<br>(2,5) (3,6)<br>(4,6) | (1,2) |                        |                       |                   |
| $\pi = (0,$ | (1,2) (1,4)<br>(3,6) (4,3)<br>(4,5) | (5,6) |                        |                       |                   |

Risolvere il problema con il simplesso per flussi.

13. Si risolva un problema di trasporto con 3 origini, in cui si producono 7, 12 e 10 unità di prodotto, e 4 destinazioni, la cui richiesta è di 8, 6, 7 e 8 unità. I costi unitari di trasporto sono dati nella seguente tabella:

|    |   |   |   |
|----|---|---|---|
| 5  | 5 | 6 | 9 |
| 3  | 4 | 7 | 8 |
| 10 | 7 | 4 | 7 |

14. Nel simplesso per flussi il ciclo che l'arco entrante forma con gli archi di  $T$  è unico?
15. Si consideri il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete. Su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità.



Riempire la tabella:

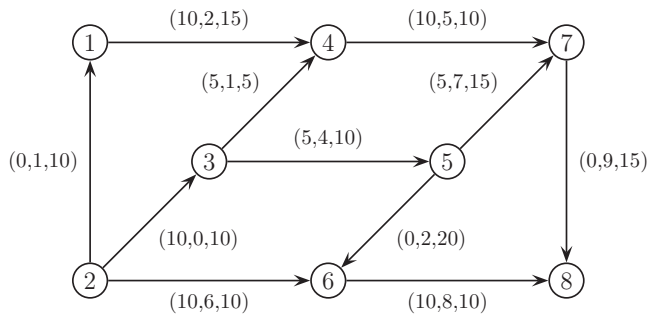


9. ESERCIZI DI PL SU RETI

| Vettore     | $T$                                 | $U$   | Ammissibile<br>(SI/NO) | Degenerare<br>(SI/NO) | Ottimo<br>(SI/NO) |
|-------------|-------------------------------------|-------|------------------------|-----------------------|-------------------|
| $x =$       | (1,4) (1,5)<br>(2,3) (3,4)<br>(5,6) | (4,5) |                        |                       |                   |
| $\pi = (0,$ | (1,5) (2,4)<br>(3,4) (4,5)<br>(5,6) | (4,6) |                        |                       |                   |

Risolvere il problema con il simplesso per flussi.

16. Sia dato il grafo seguente:



su ogni arco sono indicati, nell'ordine, un flusso dato, il costo e la capacità superiore. Verificare se il flusso dato è un flusso ottimo. Determinarne inoltre l'albero dei cammini minimi di radice 2.

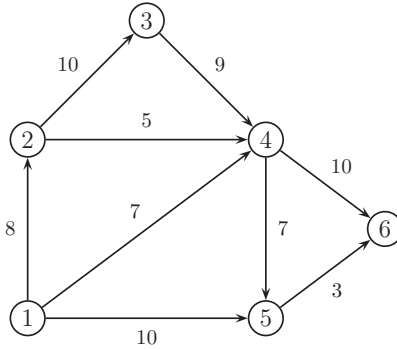
17. Un carburante è disponibile nei depositi  $D_1, D_2, D_3$  rispettivamente nelle quantità (in migliaia di litri) 8,3,4. Tale carburante è richiesto nei porti  $P_1, P_2, P_3$  rispettivamente nelle quantità 4,6,5. Sapendo che la matrice dei costi unitari di trasporto è la seguente:

|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $D_1$ | 1     | 2     | 1     |
| $D_2$ | 5     | 2     | 3     |
| $D_3$ | 4     | 5     | 2     |

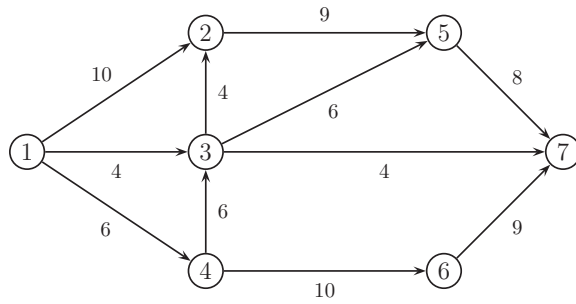
che da ogni deposito la spedizione deve avvenire direttamente a ciascun porto, che ogni deposito dispone di 3 automezzi, e che ogni automezzo ha capacità 5000 litri, determinare un programma di spedizioni che implichi il minimo costo complessivo. Esiste un unico programma di trasporti?

18. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

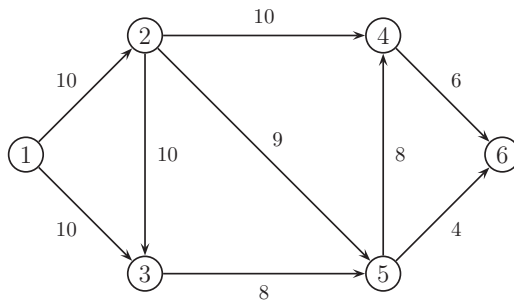
9. ESERCIZI DI PL SU RETI



19. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

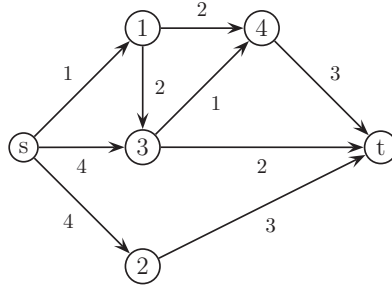


20. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

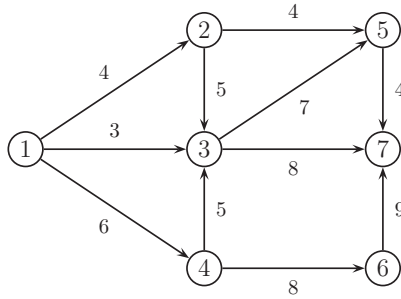


21. Dimostrare che esiste un problema di PL equivalente al problema della determinazione del cammino di costo minimo da  $s$  a  $t$  e costruirlo sul seguente grafo:

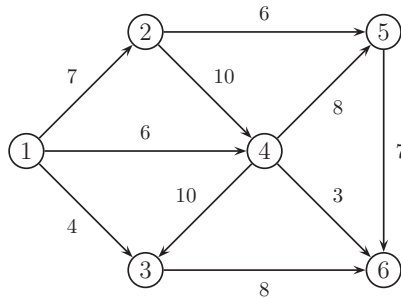
9. ESERCIZI DI PL SU RETI



22. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



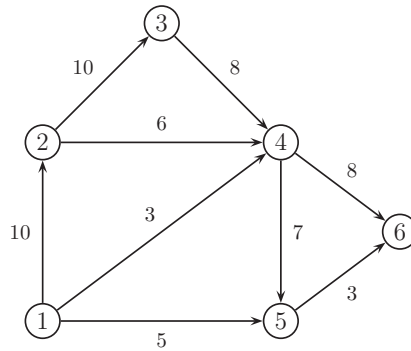
23. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



24. Sia  $T$  un albero dei cammini minimi. Nell'ipotesi che il peso di un arco venga modificato, indicare sotto quali ipotesi l'albero  $T$  rimane ottimo, analizzando i diversi casi possibili.

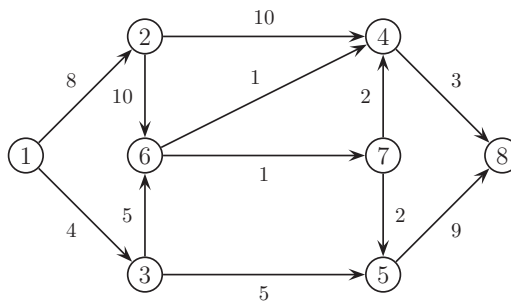
## 9. ESERCIZI DI PL SU RETI

25. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



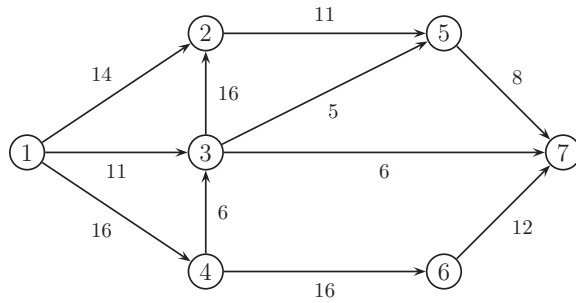
26. Risolvere i problemi precedenti con il semplice per cammini e con l'algoritmo di Bellman.

27. Si determini il taglio di capacità minima sul grafo

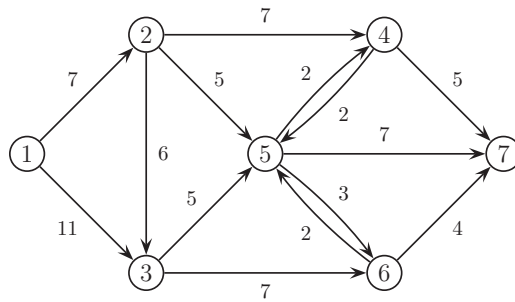


28. Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con l'algoritmo di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo da 1 a 7 ed il taglio di capacità minima sulla seguente rete.

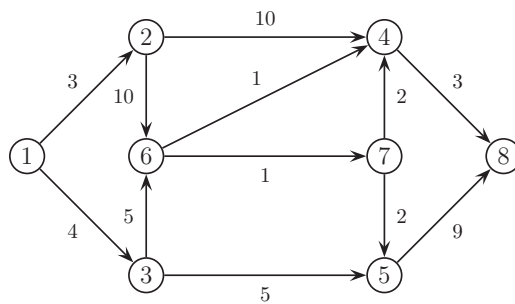
9. ESERCIZI DI PL SU RETI



29. Determinare il taglio di capacità minima sul grafo seguente:

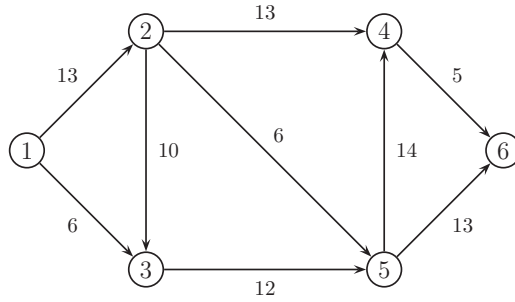


30. Determinare il flusso massimo da 1 a 8 nel grafo seguente:

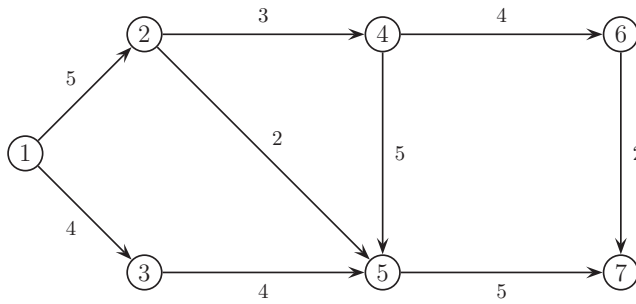


31. Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson per trovare il flusso massimo da 1 a 6 ed il taglio di capacità minima.

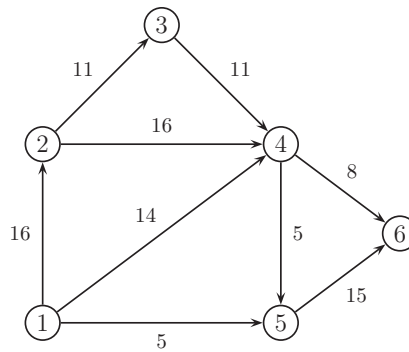
9. ESERCIZI DI PL SU RETI



32. Applicare l'algoritmo di Ford–Fulkerson per trovare il flusso massimo da 1 a 6 ed il taglio di capacità minima.

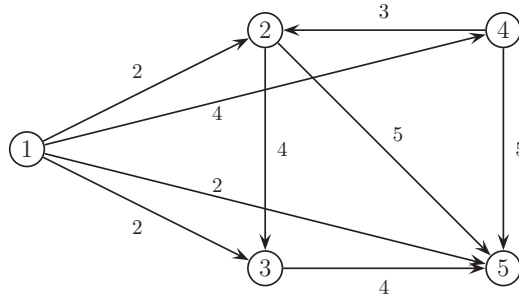


33. Trovare il flusso massimo da 1 a 6 ed il taglio di capacità minima sulla seguente rete.

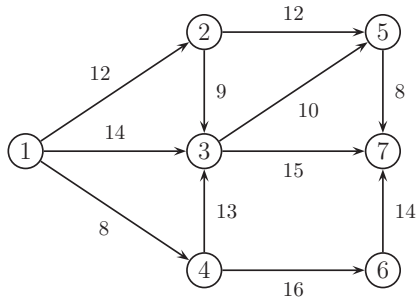


34. Si risolva il problema di flusso massimo da 1 a 5 nel seguente grafo:

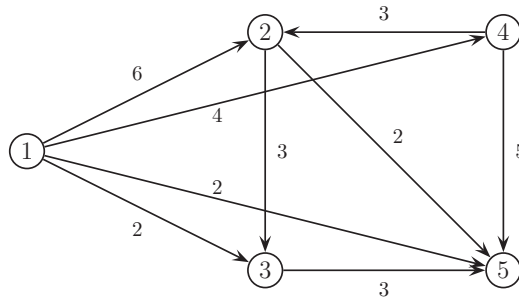
9. ESERCIZI DI PL SU RETI



35. Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson per trovare il flusso massimo da 1 a 7 ed il taglio di capacità minima.

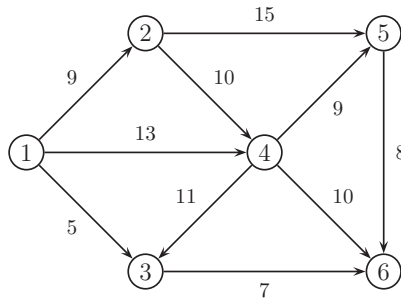


36. Si determini sul grafo seguente il flusso massimo da 1 a 5:

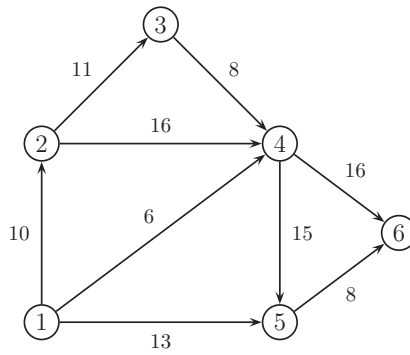


37. Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson per trovare il flusso massimo da 1 a 6 ed il taglio di capacità minima.

9. ESERCIZI DI PL SU RETI



38. Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson per trovare il flusso massimo da 1 a 6 ed il taglio di capacità minima.



39. Risolvere i problemi precedenti applicando il simplesso per flussi.



**Parte III**

**Programmazione Lineare Intera  
(PLI)**



# Capitolo 10

## Problemi e modelli di PLI

### 10.1 Carico fisso

Sono quei problemi che hanno un costo iniziale fisso legato all'inizio di un'attività. Costo che poi prosegue con andamento proporzionale al livello dell'attività. Si incontrano in numerose situazioni reali; vediamone alcune. Per entrare in un fondo di investimento c'è una spesa iniziale che per una certa quota non è legata all'ammontare dell'investimento. Nelle spedizioni di pacchi e corrispondenza c'è una quota fissa iniziale e poi il costo aumenta in proporzione al peso. Le spese di noleggio hanno un costo iniziale indipendente dall'uso e poi un costo proporzionale all'uso. Per costruire un modello matematico per questo tipo di problemi ci sono varie possibilità. Un modo di procedere è quello che conduce alla costruzione di un modello di Programmazione Lineare Intera. Per ogni variabile  $x_i$  che rappresenta un bene a carico fisso si introduce una nuova variabile  $y_i \in \{0, 1\}$  ed una quantità molto grande  $M_i$  fissata all'inizio arbitrariamente. L'introduzione del vincolo

$$x_i \leq M_i y_i$$

sta a significare che l'attivazione della variabile  $x_i$  può avvenire solo se  $y_i = 1$  (altrimenti  $y_i = 0$  implica  $x_i = 0$ ) ed in tal caso la limitazione  $x_i \leq M_i$  diventa fittizia perché  $M_i$  è molto grande. Basterà poi aggiungere nella funzione obiettivo la quantità  $f_i y_i$ , dove  $f_i$  è il carico fisso della variabile  $x_i$ ; in tal caso infatti  $y_i = 1$  implica un'aggiunta nella funzione obiettivo della quantità  $f_i$ .

**Esempio 10.1.1.** Un'azienda conserviera produce tonno all'olio, tonno al vapore e tonno agli aromi. La produzione di tali prodotti richiede un macchinario che deve essere affittato al seguente costo: tonno-olio, 200 euro per settimana; tonno-vapore, 150 euro per settimana; tonno-aromi, 100 euro per settimana. Le seguenti tabelle danno le richieste di quantità di materia prima e di ore di lavoro, le spese e di guadagni:

## 10. PROBLEMI E MODELLI DI PLI

| prodotto     | tempi di lavorazione<br>(ore/scatola) | quantità di materia prima<br>(kg/scatola) |
|--------------|---------------------------------------|---|
| tonno-olio   | 3                                     | 4   |
| tonno-vapore | 2                                     | 3   |
| tonno-aromi  | 6                                     | 4   |

| prodotto     | ricavo<br>(euro/scatola) | spesa<br>(euro/scatola) |
|--------------|--------------------------|-------------------------|
| tonno-olio   | 12                       | 6                       |
| tonno-vapore | 8                        | 4                       |
| tonno-aromi  | 15                       | 8                       |

Ogni settimana sono disponibili 150 ore di lavoro e 160 kg di tonno. Se  $x_1, x_2, x_3$  rappresentano le scatole di tonno all'olio, al vapore e agli aromi prodotti ogni settimana, il modello è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (12 - 6) x_1 + (8 - 4) x_2 + (15 - 8) x_3 - 200 y_1 - 150 y_2 - 100 y_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\ x_1 \leq M_1 y_1 \\ x_2 \leq M_2 y_2 \\ x_3 \leq M_3 y_3 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+ \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

□

## 10.2 Alternative

Ci sono situazioni in cui si devono modellizzare due vincoli  $g_1(x) \leq 0$  e  $g_2(x) \leq 0$  che sono in alternativa, cioè non possono essere soddisfatti entrambi. Introducendo una variabile binaria  $y \in \{0, 1\}$  e una quantità  $M$  molto elevata, l'alternativa tra i due vincoli può essere modellizzata così:

$$\begin{aligned} g_1(x) &\leq M y \\ g_2(x) &\leq M (1 - y) \end{aligned}$$

Infatti, se  $y = 0$  si ha  $g_1(x) \leq 0$  (cioè imponiamo che sia soddisfatto il primo vincolo) e  $g_2(x) \leq M$  che diventa un vincolo superfluo poiché  $M$  è stata scelta molto grande. In modo analogo si tratta il caso  $y = 1$ .

Un caso in cui si possono presentare vincoli alternativi può essere quello di un problema di produzione in cui venga richiesto che se una merce viene prodotta, allora bisogna produrne almeno in una certa quantità.

**Esempio 10.2.1.** Un'azienda produce tre tipi di auto: utilitarie, berline, station-wagon. Supponiamo che risorse, richieste e guadagni siano sintetizzate nella seguente tabella

| auto          | acciaio<br>(tonnellate) | lavoro<br>(ore) | profitto<br>(euro) |
|---------------|-------------------------|-----------------|--------------------|
| utilitarie    | 1.5                     | 30              | 2000               |
| berline       | 3                       | 25              | 3000               |
| station-wagon | 5                       | 40              | 4000               |

Supponiamo di avere a disposizione 6000 tonnellate di acciaio, 60000 ore di lavoro e di essere a conoscenza che se si produce un tipo di veicolo, allora se ne devono produrre almeno 1000 unità. Indichiamo con  $x_1, x_2$  e  $x_3$  la quantità di utilitarie, berline e station-wagon da produrre. Il problema può essere formulato nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 2000 x_1 + 3000 x_2 + 4000 x_3 \\ 1.5 x_1 + 3 x_2 + 5 x_3 \leq 6000 \\ 30 x_1 + 25 x_2 + 40 x_3 \leq 60000 \\ x_1 \leq 4000 y_1 \\ 1000 - x_1 \leq 4000 (1 - y_1) \\ x_2 \leq 2000 y_2 \\ 1000 - x_2 \leq 2000 (1 - y_2) \\ x_3 \leq 1200 y_3 \\ 1000 - x_3 \leq 1200 (1 - y_3) \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+ \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

Notiamo che il terzo e quarto vincolo rappresentano l'alternativa tra non produrre utilitarie e produrne almeno 1000. Infatti, se  $y_1 = 0$  il terzo vincolo diventa  $x_1 \leq 0$  e quindi  $x_1 = 0$ ; mentre se  $y_1 = 1$  il quarto vincolo diventa  $1000 - x_1 \leq 0$ , cioè  $x_1 \geq 1000$ . La scelta della costante 4000 è dovuta al fatto che non si possono produrre più di 4000 utilitarie con la quantità di acciaio a disposizione.

□

## 10.3 Distribuzione di lavori

Supponiamo che un'azienda abbia a disposizione  $m$  macchine per eseguire  $n$  lavori; supponiamo inoltre che  $t_{ij}$  sia il tempo necessario alla macchina  $j$  per eseguire il lavoro  $i$  e che ogni lavoro debba essere eseguito da una sola macchina. Introduciamo le variabili binarie  $x_{ij}$ , dove:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ è eseguito dalla macchina } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Un possibile obiettivo può essere quello di effettuare tutti i lavori nel minor tempo possibile. Tale problema può essere formulato così:

$$\begin{cases} \min t \\ \sum_{i=1}^n t_{ij} x_{ij} \leq t & \text{per ogni macchina } j = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 & \text{per ogni lavoro } i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Un altro possibile obiettivo potrebbe essere quello del dimensionamento, ossia di dover trovare il minor numero possibile di macchine che consenta l'effettuazione dei lavori entro un tempo fissato  $T$ . Il modello matematico potrebbe essere:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^k y_j \\ \sum_{i=1}^n t_{ij} x_{ij} \leq T y_j & \text{per ogni macchina } j = 1, \dots, k \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 & \text{per ogni lavoro } i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \\ y_j \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

dove  $k$  è una stima superiore del numero di macchine necessarie. Se il tempo di esecuzione del lavoro  $i$  non dipende dalla macchina  $j$ , cioè  $t_{ij} = t_i$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ , allora il problema è noto in letteratura come *bin packing*. In questo caso ogni lavoro  $i$  può essere interpretato come un oggetto di volume (o peso)  $t_i$  ed ogni macchina  $j$  come un deposito (*bin*) di capacità  $T$ . Il problema di riempimento consiste nel trovare il minimo numero di depositi necessari per contenere tutti gli oggetti:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^k y_j \\ \sum_{i=1}^n t_i x_{ij} \leq T y_j & \text{per ogni deposito } j = 1, \dots, k \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 & \text{per ogni oggetto } i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \\ y_j \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

**Esempio 10.3.1.** Supponiamo di avere a disposizione 4 macchine per eseguire 8 lavori e che il numero di giorni impiegato dalla macchina  $j$  per svolgere il lavoro  $i$  sia indicato in tabella (\* significa incapacità a svolgere il lavoro):

### 10.3 DISTRIBUZIONE DI LAVORI

|          | macchina 1 | macchina 2 | macchina 3 | macchina 4 |
|----------|------------|------------|------------|------------|
| lavoro 1 | 6          | *          | 7          | 3          |
| lavoro 2 | 4          | 7          | 5          | 6          |
| lavoro 3 | *          | 5          | 9          | 4          |
| lavoro 4 | *          | 4          | 6          | 5          |
| lavoro 5 | 5          | 8          | 2          | *          |
| lavoro 6 | 9          | 9          | 3          | 7          |
| lavoro 7 | 8          | 2          | *          | 6          |
| lavoro 8 | 7          | 6          | 9          | 5          |

Il problema di effettuare tutti i lavori nel minor tempo possibile può essere formulato così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min t \\ 6x_{11} + 4x_{21} + 5x_{51} + 9x_{61} + 8x_{71} + 7x_{81} \leq t \\ 7x_{22} + 5x_{32} + 4x_{42} + 8x_{52} + 9x_{62} + 2x_{72} + 6x_{82} \leq t \\ 7x_{13} + 5x_{23} + 9x_{33} + 6x_{43} + 2x_{53} + 3x_{63} + 9x_{83} \leq t \\ 3x_{14} + 6x_{24} + 4x_{34} + 5x_{44} + 7x_{64} + 6x_{74} + 5x_{84} \leq t \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} = 1 \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} = 1 \\ x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} = 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

Per il problema del dimensionamento, supponiamo di voler trovare il minor numero possibile di macchine che consenta di effettuare i lavori entro 12 giorni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ 6x_{11} + 4x_{21} + 5x_{51} + 9x_{61} + 8x_{71} + 7x_{81} \leq 12y_1 \\ 7x_{22} + 5x_{32} + 4x_{42} + 8x_{52} + 9x_{62} + 2x_{72} + 6x_{82} \leq 12y_2 \\ 7x_{13} + 5x_{23} + 9x_{33} + 6x_{43} + 2x_{53} + 3x_{63} + 9x_{83} \leq 12y_3 \\ 3x_{14} + 6x_{24} + 4x_{34} + 5x_{44} + 7x_{64} + 6x_{74} + 5x_{84} \leq 12y_4 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} = 1 \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} = 1 \\ x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} = 1 \\ x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

Consideriamo infine il problema di *bin packing* che consiste nel disporre nel minor numero di camion, ognuno di portata 30 tonnellate, 8 oggetti aventi i pesi (7, 9, 11, 5, 13, 14, 9, 16).

Il problema viene formulato così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ 7x_{11} + 9x_{21} + 11x_{31} + 5x_{41} + 13x_{51} + 14x_{61} + 9x_{71} + 16x_{81} \leq 30y_1 \\ 7x_{12} + 9x_{22} + 11x_{32} + 5x_{42} + 13x_{52} + 14x_{62} + 9x_{72} + 16x_{82} \leq 30y_2 \\ 7x_{13} + 9x_{23} + 11x_{33} + 5x_{43} + 13x_{53} + 14x_{63} + 9x_{73} + 16x_{83} \leq 30y_3 \\ 7x_{14} + 9x_{24} + 11x_{34} + 5x_{44} + 13x_{54} + 14x_{64} + 9x_{74} + 16x_{84} \leq 30y_4 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} = 1 \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} = 1 \\ x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} = 1 \\ x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

□

## 10.4 Selezione di sottoinsiemi

Siano dati:

- un insieme  $I = \{1, \dots, m\}$ ,
- una famiglia  $S_1, \dots, S_n$  di sottoinsiemi di  $I$
- un costo  $c_j$  per ogni sottoinsieme  $S_j$ , con  $j = 1, \dots, n$ .

Supponiamo che il costo di ogni sottoinsieme sia indipendente da quello degli altri sottoinsiemi e che il costo di una sottofamiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi sia la somma dei costi dei suoi elementi. Consideriamo i seguenti tre problemi:

- (i) **problema di copertura**: determinare una sottofamiglia  $\mathcal{F}$  di costo minimo tale che ogni elemento di  $I$  appartenga ad *almeno* un sottoinsieme di  $\mathcal{F}$ ;
- (ii) **problema di partizione**: determinare una sottofamiglia  $\mathcal{F}$  di costo minimo tale che ogni elemento di  $I$  appartenga *esattamente* ad un sottoinsieme di  $\mathcal{F}$ ;
- (iii) **problema di riempimento o inclusione**: determinare una sottofamiglia  $\mathcal{F}$  di costo massimo tale che ogni elemento di  $I$  appartenga ad *al più* un sottoinsieme di  $\mathcal{F}$ .



Indichiamo con  $A$  la matrice:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e ad ogni sottofamiglia  $\mathcal{F}$  associamo una variabile  $x$ :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se } S_j \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I 3 problemi hanno le seguenti formulazioni come problemi di PLI:

$$(i) \quad \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax \geq \mathbf{1} \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases} \quad (ii) \quad \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax = \mathbf{1} \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases} \quad (iii) \quad \begin{cases} \max c^\top x \\ Ax \leq \mathbf{1} \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases}$$

dove il vettore  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$ .

Illustriamo alcuni problemi reali che possono essere formulati come selezione ottima di sottoinsiemi.

### Formazione di turni

Una possibile applicazione dei problemi di copertura è data dal problema di garantire la presenza di almeno una squadra di lavoratori in ciascuno degli  $m$  intervalli temporali in cui è suddivisa una giornata lavorativa. Si identifica con  $I$  l'insieme degli  $m$  intervalli. Ad ogni squadra è associato l'insieme  $S_j$  degli intervalli che essa può “coprire” (cioè nei quali può essere presente). Con  $c_j$  indichiamo il costo (ad esempio in termini di salario) della squadra  $S_j$ .

**Esempio 10.4.1.** Supponiamo che  $I = \{1, \dots, 24\}$  identifichi 24 periodi, di un'ora ciascuno, e che le possibili squadre di lavoratori, i loro orari di lavoro ed il loro costo siano riportati nella seguente tabella:

| Squadra<br>di lavoratori | Orario di lavoro | Costo |
|--------------------------|------------------|-------|
| 1                        | 23–7             | 7     |
| 2                        | 2–9              | 7     |
| 3                        | 5–12             | 5     |
| 4                        | 7–14             | 5     |
| 5                        | 9–16             | 5     |
| 6                        | 12–19            | 5     |
| 7                        | 14–21            | 5     |
| 8                        | 16–23            | 5     |
| 9                        | 19–2             | 7     |
| 10                       | 21–5             | 7     |

# 10. PROBLEMI E MODELLI DI PLI

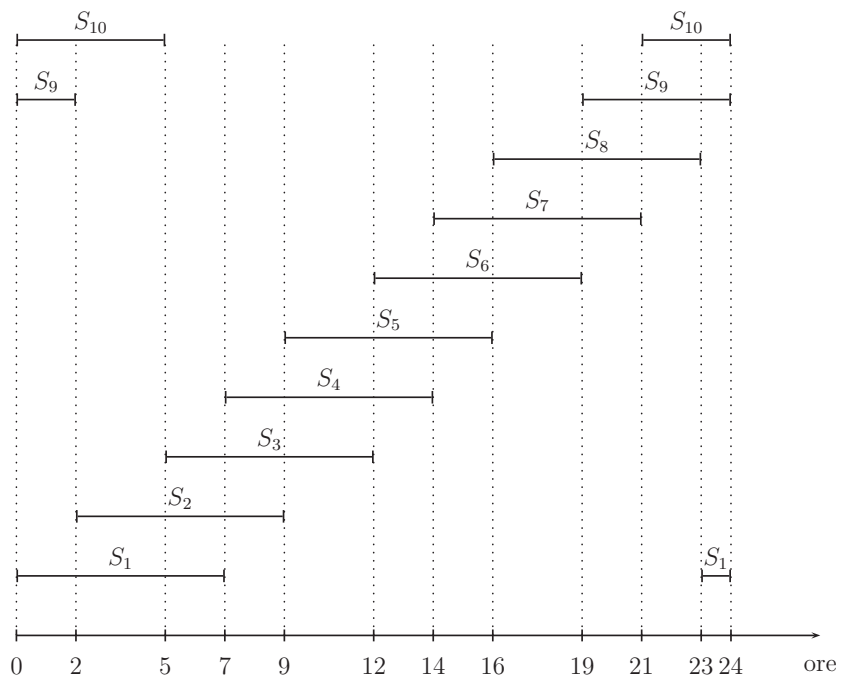


Figura 10.1: un problema di formazione di turni.

Ogni squadra di lavoratori può essere rappresentata da un segmento che indica il corrispondente orario di lavoro (vedi Figura 10.1).

Il problema viene così formulato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 7x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 5x_7 + 5x_8 + 7x_9 + 7x_{10} \\ x_9 + x_{10} + x_1 \geq 1 \\ x_{10} + x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_7 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x \in \{0, 1\}^{10}. \end{array} \right.$$

□

Vediamo un altro esempio sulla formazione dei turni. Un ospedale deve organizzare il problema dei turni degli infermieri con programmazione settimanale. Supponiamo che l'azienda ospedaliera possa dislocare in quell'ospedale un numero di infermieri in base alle esigenze. Tali esigenze sono quantificate in modo da conoscere il numero minimo  $b_i$  di infermieri necessari per ogni giorno  $i$  della settimana e che ogni infermiere abbia il dovere di lavorare 5 giorni consecutivi ed il diritto poi a 2 giorni consecutivi di riposo.

Introducendo le variabili  $x_i$  che rappresentano il numero di infermieri che cominciano a lavorare il giorno  $i$ , il problema si può formulare così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq b_1 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq b_2 \\ \vdots \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq b_7 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7 \end{array} \right.$$

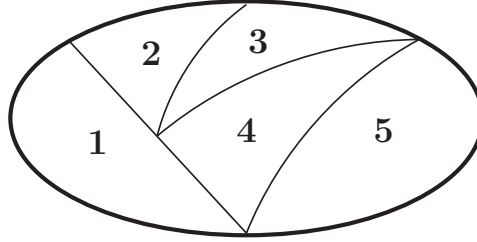
Il primo vincolo stabilisce che almeno  $b_1$  infermieri devono lavorare lunedì. Ma gli infermieri che lavorano lunedì sono  $x_1$  (quelli che iniziano a lavorare il lunedì), più  $x_4$  (quelli che hanno cominciato il giovedì della settimana prima e quindi lavorando per 5 giorni consecutivi sono in servizio ancora lunedì), più  $x_5$  (inizio lavoro venerdì), più  $x_6$  (inizio lavoro sabato), più  $x_7$  (inizio lavoro domenica).

## Colorazione di mappe

Data una mappa divisa in regioni, si cerca il minimo numero di colori necessario per colorare tutte le regioni in modo che regioni confinanti (cioè aventi più di un punto in comune)

abbiamo colori diversi. Tale problema può essere formulato come problema di partizione in cui  $I$  identifica l'insieme delle regioni, i sottoinsiemi  $S_1, \dots, S_n$  sono i sottoinsiemi di regioni non confinanti tra loro e i costi  $c_j = 1$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ .

**Esempio 10.4.2.** Supponiamo di dover colorare la seguente mappa divisa in 5 regioni:



In tal caso abbiamo  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , e  $S_1 = \{1, 3\}$ ,  $S_2 = \{1, 5\}$ ,  $S_3 = \{2, 4\}$ ,  $S_4 = \{2, 5\}$ ,  $S_5 = \{3, 5\}$ ,  $S_6 = \{1, 3, 5\}$ . Il problema ha la seguente formulazione:

$$\begin{cases} \min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + x_2 + x_6 = 1 \\ & x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 + x_5 + x_6 = 1 \\ & x_3 = 1 \\ & x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ & x \in \{0, 1\}^6. \end{cases}$$

□

## Ricerca di informazioni

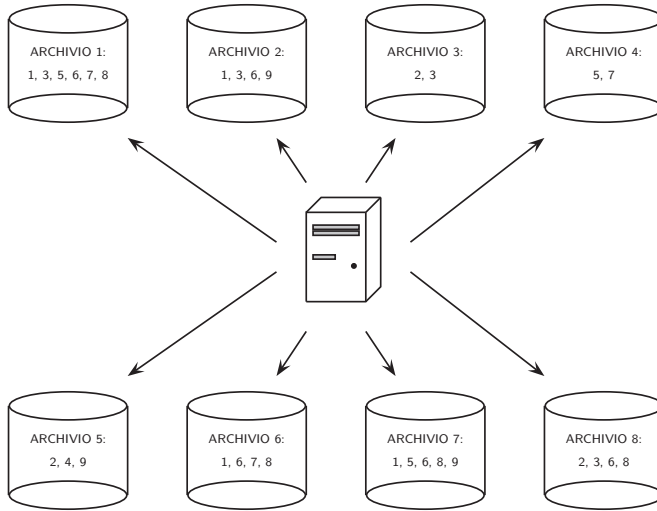
Supponiamo di dover soddisfare  $m$  richieste di dati, di avere a disposizione  $n$  archivi, ognuno dei quali contiene alcune delle  $m$  informazioni richieste e conosciamo il costo per interrogare ogni archivio. Il problema da risolvere è riuscire a selezionare un sottoinsieme di archivi capace di soddisfare tutte le richieste e che richieda il minimo costo totale. Tale problema può essere formulato come problema di copertura, dove  $I$  è l'insieme delle richieste, i sottoinsiemi  $S_1, \dots, S_n$  denotano gli archivi e  $c_j$  è il costo di interrogazione di ogni archivio.

**Esempio 10.4.3.** Supponiamo di avere 8 archivi a disposizione e di dover soddisfare 9 richieste di dati. I costi degli archivi sono i seguenti:

$$c_1 = 10, \quad c_2 = 6, \quad c_3 = 4, \quad c_4 = 2, \quad c_5 = 8, \quad c_6 = 5, \quad c_7 = 3, \quad c_8 = 7,$$

#### 10.4 SELEZIONE DI SOTTOINSIEMI

mentre le informazioni contenute negli archivi sono descritte nella seguente figura:



Tale problema ha la seguente formulazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 5x_6 + 3x_7 + 7x_8 \\ x_1 + x_2 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_8 \geq 1 \\ x_5 \geq 1 \\ x_1 + x_4 + x_7 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_4 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_2 + x_5 + x_7 \geq 1 \\ x \in \{0, 1\}^8. \end{array} \right.$$

□



# Capitolo 11

## Teoria della PLI

### 11.1 Relazioni tra PL e PLI

Un problema di programmazione lineare intera (PLI) consiste nel trovare il minimo (o il massimo) di una funzione lineare su una regione definita da vincoli lineari e da vincoli di interezza sulle variabili e supponendo che i dati del problema siano numeri interi. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che tale problema sia del tipo:

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (11.1)$$

dove  $A$  è una matrice  $m \times n$  a componenti intere,  $b \in \mathbb{Z}^m$  e  $c \in \mathbb{Z}^n$ . I problemi in cui le variabili sono vincolate ad avere valore 0 oppure 1 si chiamano problemi di ottimizzazione combinatorica. Indichiamo il poliedro definito dai vincoli lineari con:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

e la regione ammissibile di (11.1) con  $\Omega = P \cap \mathbb{Z}^n$ . Il problema:

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \end{cases}$$

viene detto rilassamento continuo di (11.1). Vediamo ora come le soluzioni ottime di un problema di PLI sono legate a quelle del suo rilassamento continuo. Il seguente esempio mostra che, se  $\bar{x}$  è la soluzione ottima del suo rilassamento continuo, allora né la soluzione ammissibile ottenuta arrotondando  $\bar{x}$ , né la soluzione ammissibile più vicina (in norma euclidea) a  $\bar{x}$  sono in generale soluzioni ottime del problema di PLI.

**Esempio 11.1.1.** Consideriamo il seguente problema di PLI in due variabili:

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2. \end{cases} \quad (11.2)$$

## 11. TEORIA DELLA PLI

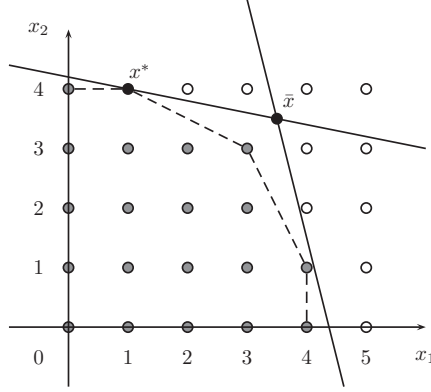


Figura 11.1: soluzione ottima del problema (11.2) e del suo rilassamento continuo.

Come è evidente dalla Figura 11.1, la soluzione ottima del problema (11.2) è  $x^* = (1, 4)$  con valore ottimo 13, mentre la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $\bar{x} = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$ , con valore ottimo 14. Arrotondando le componenti di  $\bar{x}$  si ottiene la soluzione ammissibile  $(3, 3)$  che è anche la più vicina a  $\bar{x}$  secondo la distanza euclidea. Tuttavia  $(3, 3)$  non è ottima per il problema (11.2) perché ha un valore pari a 12.  $\square$

L'esempio precedente mostra che per risolvere un problema di PLI non basta trovare la soluzione ottima del rilassamento continuo. Vediamo quale ruolo gioca la soluzione ottima del rilassamento continuo.

Nella Figura 11.1 il poliedro delimitato dagli assi cartesiani e dai vincoli lineari tratteggiati rappresenta l'involucro convesso delle soluzioni ammissibili:

$$\text{conv } \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists x^1, \dots, x^p \in \Omega, \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0, \text{ tali che } x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}.$$

Poiché si ha che  $\Omega \subseteq \text{conv } \Omega \subseteq P$ , abbiamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$\max_{x \in P} c^\top x \geq \max_{x \in \text{conv } \Omega} c^\top x \geq \max_{x \in \Omega} c^\top x.$$

Diamo una caratterizzazione della regione ammissibile  $\Omega$ . Indichiamo con  $\lfloor x \rfloor$  la parte intera inferiore di  $x$ , cioè, il massimo intero minore o uguale a  $x$ , e con  $\{x\}$  la parte frazionaria di  $x$ , definita come  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ .

**Lemma 11.1.1.** *Esiste un insieme finito di punti  $\{q^\ell\}_{\ell \in L}$  di  $\Omega$  ed un insieme finito di direzioni di recessione  $\{r^j\}_{j \in J}$  di  $P$  tali che:*

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : x = \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell q^\ell + \sum_{j \in J} \beta_j r^j, \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell = 1, \alpha \in \mathbb{Z}_+^{|L|}, \beta \in \mathbb{Z}_+^{|J|} \right\}.$$



## 11.1 RELAZIONI TRA PL E PLI

**Dimostrazione.** Per il teorema di rappresentazione dei poliedri, esiste un insieme finito  $\{x^k\}_{k \in K}$  di vertici di  $P$  ed un insieme finito  $\{r^j\}_{j \in J}$  di direzioni di recessione di  $P$ , tali che:

$$P = \text{conv} \{x^k\}_{k \in K} + \text{cono} \{r^j\}_{j \in J},$$

Poiché  $A$  e  $b$  sono a componenti intere,  $x^k$  e  $r^j$  hanno coordinate razionali, anzi, normalizzando si può supporre che  $r^j$  siano a componenti intere. Definiamo l'insieme:

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{Z}_+^n : x = \sum_{k \in K} \lambda_k x^k + \sum_{j \in J} \mu_j r^j, \sum_{k \in K} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, 0 \leq \mu_j < 1 \right\}$$

e poniamo:

$$Q = \{q^\ell \in \mathbb{Z}_+^n : \ell \in L\}.$$

Si ha che  $Q \subseteq \Omega$ . Osserviamo che se  $x \in \Omega$ , allora  $x \in \mathbb{Z}_+^n$  e  $x \in P$ , ovvero  $x \in \mathbb{Z}_+^n$  e

$$x = \left( \sum_{k \in K} \lambda_k x^k + \sum_{j \in J} \{\mu_j\} r^j \right) + \sum_{j \in J} \lfloor \mu_j \rfloor r^j,$$

con  $\lambda_k, \mu_i \geq 0$  e  $\sum_{k \in K} \lambda_k = 1$ , e quindi si ha la tesi.  $\square$

Il secondo passo è dimostrare che  $\text{conv} \Omega$  è un poliedro razionale, cioè un poliedro caratterizzato da disequazioni a coefficienti razionali.

**Lemma 11.1.2.** *conv  $\Omega$  è un poliedro razionale; cioè esiste un insieme finito di vettori  $q^1, \dots, q^{|L|}$ ,  $r^1, \dots, r^{|J|}$  a componenti razionali, tali che:*

$$\text{conv} \Omega = \text{conv} \{q^\ell\}_{\ell \in L} + \text{cono} \{r^j\}_{j \in J}.$$

**Dimostrazione.** Sia  $y \in \text{conv} \Omega$ , cioè:

$$y = \sum_{i \in I} \gamma_i y^i,$$

dove  $y^i \in \Omega$ ,  $\gamma_i \geq 0$  e  $\sum_{i \in I} \gamma_i = 1$ . Per il Lemma 11.1.1, ogni punto  $y^i \in \Omega$  può essere scritto come:

$$y^i = q^{\ell(i)} + \sum_{j \in J} \beta_j^i r^j \quad \text{con } \beta_j^i \in \mathbb{Z}_+,$$

quindi:

$$y = \sum_{i \in I} \gamma_i q^{\ell(i)} + \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} \gamma_i \beta_j^i \right) r^j = \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell q^\ell + \sum_{j \in J} \beta_j r^j,$$

con  $\alpha_\ell \geq 0$ ,  $\sum \alpha_\ell = 1$  e  $\beta_j \geq 0$ . Quindi,  $y \in \text{conv} \{q^\ell\}_{\ell \in L} + \text{cono} \{r^j\}_{j \in J}$ .

Viceversa, supponiamo che

$$y \in \text{conv} \{q^\ell\}_{\ell \in L} + \text{cono} \{r^j\}_{j \in J}.$$

Per dimostrare che  $y \in \text{conv} \Omega$ , procediamo per passi:

## 11. TEORIA DELLA PLI

- Se  $y \in \text{conv} \{q^\ell\}_{\ell \in L}$ , allora  $y \in \text{conv} \Omega$ , perché  $Q \subseteq \Omega$ ;
- se  $y = z + \beta_t r^t$  con  $z \in \text{conv} \Omega$ ,  $\beta_t \in \mathbb{Z}_+$  e  $t \in J$ , allora:

$$z = \sum_{i \in I} \gamma_i y^i,$$

con  $\gamma_i \geq 0$ ,  $\sum_{i \in I} \gamma_i = 1$  e

$$y^i = q^{\ell(i)} + \sum_{j \in J} \beta_j^i r^j \quad \text{con } \beta_j^i \in \mathbb{Z}_+,$$

quindi:

$$y = \sum_{i \in I} \gamma_i \left( q^{\ell(i)} + \sum_{j \in J} \beta_j^i r^j + \beta_t r^t \right),$$

cioè  $y \in \text{conv} \Omega$ ;

- se  $y = z + \beta_t r^t$  con  $z \in \text{conv} \Omega$ ,  $\beta_t \notin \mathbb{Z}_+$  e  $t \in J$ , allora scriviamo

$$\beta_t = \lambda \lfloor \beta_t \rfloor + (1 - \lambda) \lceil \beta_t \rceil, \quad \lambda \in (0, 1),$$

dove  $\lceil x \rceil$  rappresenta la parte intera superiore di  $x$ , cioè  $\lfloor x \rfloor + 1$ . Abbiamo:

$$y = z + \lambda \lfloor \beta_t \rfloor r^t + (1 - \lambda) \lceil \beta_t \rceil r^t = \lambda(z + \lfloor \beta_t \rfloor r^t) + (1 - \lambda)(z + \lceil \beta_t \rceil r^t),$$

cioè,  $y \in \text{conv} \Omega$ , per il passo precedente.

□

Se  $A$  e  $b$  non sono a componenti razionali, allora  $\text{conv} \Omega$  può non essere un poliedro, come dimostra l'esempio seguente.

**Esempio 11.1.2.** Consideriamo il poliedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq \sqrt{2} x_1\}$$

e dimostriamo che  $\text{conv} \Omega$  coincide con il cono

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 < \sqrt{2} x_1\}$$

che non è un poliedro perché non è chiuso.

Dimostriamo prima che  $\text{conv} \Omega \subseteq C$ : se  $x$  è un arbitrario elemento di  $\Omega$ , allora  $x \in P$ , cioè  $0 \leq x_2 \leq \sqrt{2} x_1$ . Poiché  $\sqrt{2}$  è irrazionale e  $x$  ha componenti intere, si ha  $0 \leq x_2 < \sqrt{2} x_1$ , cioè  $x \in C$  e quindi  $\Omega \subseteq C$ . Poiché  $C$  è un insieme convesso si ottiene anche che  $\text{conv} \Omega \subseteq C$ .

## 11.1 RELAZIONI TRA PL E PLI

Dimostriamo ora che  $C \subseteq \text{conv } \Omega$ : consideriamo un arbitrario elemento  $y \in C$ . Se  $y = (0, 0)$ , allora  $y \in \Omega \subseteq \text{conv } \Omega$ . Se invece  $y \neq (0, 0)$ , allora

$$0 < \frac{y_2}{y_1} < \sqrt{2}.$$

Poiché l'insieme dei numeri razionali è denso in  $\mathbb{R}$ , è possibile trovare un numero razionale  $a/b$  tale che

$$0 < \frac{y_2}{y_1} < \frac{a}{b} < \sqrt{2}, \quad (11.3)$$

quindi il vettore  $x = (b, a)$  ha componenti intere e  $0 < x_2 < \sqrt{2} x_1$ , perciò  $x \in \Omega$ . Analogamente tutti i vettori del tipo  $(nb, na)$  con  $n \in \mathbb{N}$  appartengono all'insieme  $\Omega$  e quindi la semiretta

$$r_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \frac{a}{b} x_1, x_1 \geq 0 \right\}$$

è contenuta in  $\text{conv } \Omega$ . Inoltre i vettori del tipo  $(n, 0)$  con  $n \in \mathbb{N}$  appartengono a  $\Omega$  e quindi anche la semiretta

$$r_2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, x_1 \geq 0 \}$$

è contenuta in  $\text{conv } \Omega$ . Poiché  $\text{conv } \Omega$  è un insieme convesso, allora esso contiene anche il cono generato dalle semirette  $r_1$  e  $r_2$ , cioè

$$C(r_1, r_2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq \frac{a}{b} x_1 \right\} \subseteq \text{conv } \Omega.$$

Infine dalle relazioni (11.3) ricaviamo che  $0 < y_2 < \frac{a}{b} y_1$ , quindi  $y \in C(r_1, r_2) \subseteq \text{conv } \Omega$ .  $\square$

Consideriamo ora i due problemi:

$$v = \max_{x \in \Omega} c^\top x \quad \text{e} \quad v^* = \max_{x \in \text{conv } \Omega} c^\top x.$$

Il primo è un problema di PLI, mentre il secondo, per il Lemma 11.1.2, è un problema di PL.

**Teorema 11.1.1.** *I valori  $v$  e  $v^*$  coincidono. Inoltre, se  $v^*$  è finito, allora esiste  $x^* \in \Omega$  tale che  $c^\top x^* = v = v^*$ .*

**Dimostrazione.** Se  $v^* = +\infty$ , allora esiste una direzione di recessione  $r \in \mathbb{Z}_+^n$  tale che  $c^\top r > 0$ . Allora, scelto un qualunque  $x_0 \in \Omega$ , si ha  $x_0 + tr \in \Omega$  per ogni  $t \in \mathbb{Z}_+$  in quanto  $x_0 + tr \in \mathbb{Z}^n$  e  $x_0 + tr \in P$ . Quindi, anche  $v = +\infty$ .

Se  $v^*$  è finito allora, essendo il valore ottimo di un problema di PL, è raggiunto in uno dei  $q^\ell \in \Omega$  e, quindi:

$$c^\top q^\ell = v^* \geq v \geq c^\top q^\ell,$$

da cui segue la tesi.  $\square$

La conclusione è che un problema di PLI è equivalente ad un opportuno problema di PL. La difficoltà, tuttavia, consiste nel fatto che spesso è molto difficile costruire  $\text{conv } \Omega$ , cioè la regione ammissibile del problema di PL equivalente a quello di PLI.

## Matrici totalmente unimodulari

Abbiamo già detto che in generale per risolvere un problema di PLI non basta risolvere il suo rilassamento continuo. Presentiamo ora una classe di problemi di PLI per cui almeno una soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere e quindi coincide con l'ottimo del problema di PLI. Tale classe è quella dei problemi in cui la matrice dei vincoli è totalmente unimodulare, cioè è una matrice tale che il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0 oppure 1 oppure  $-1$ .

**Teorema 11.1.2.** *Se  $A$  e  $b$  sono a componenti intere e  $A$  è una matrice totalmente unimodulare, allora le soluzioni di base del poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  sono a componenti intere.*

**Dimostrazione.** Discende direttamente dalla definizione di matrice totalmente unimodulare.  $\square$

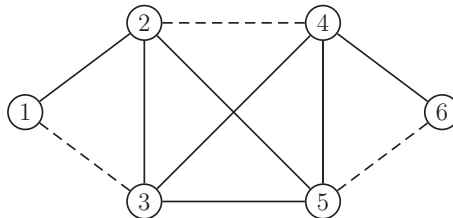
Il Teorema 11.1.2 è importante perché ci consente di risolvere con un metodo del simplesso un problema di PLI in cui la matrice  $A$  è totalmente unimodulare cancellando il vincolo di interezza.

## 11.2 Caratterizzazione della regione ammissibile

In precedenza è stato mostrato il ruolo di  $\text{conv } \Omega$ . Per capire come è fatto tale insieme, vi sono due strade possibili. La prima, cosiddetta delle disuguaglianze valide (DV), è quella di arrivare ad una sua caratterizzazione, tramite approssimazioni successive con poliedri contenuti uno nell'altro a partire da  $P$ . La seconda strada, detta della combinatorica poliedrale, è quella di stabilire, per classi di problemi, quali sono le disuguaglianze che caratterizzano  $\text{conv } \Omega$ .

Il problema dell'accoppiamento e quello della copertura per archi mostrano come ciò si possa fare in alcuni casi.

In un grafo non orientato  $G = (N, A)$ , un accoppiamento è un sottoinsieme di archi  $M \subseteq A$  tale che, per ogni nodo  $i \in N$ , esiste al più un arco in  $M$  che incide sul nodo  $i$ . Ad esempio, nel grafo seguente un accoppiamento è dato dagli archi tratteggiati:

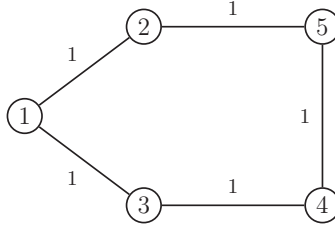


Il problema da risolvere è trovare un accoppiamento di cardinalità massima. Il poliedro  $P$  in questo caso è della forma:

$$P = \left\{ x \in [0, 1]^{|A|} : \sum_{e \in A_{inc}(i)} x_e \leq 1, \quad \forall i \in N \right\},$$

dove  $A_{inc}(i)$  indica l'insieme degli archi incidenti nel nodo  $i$ .

Quando il grafo è bipartito, abbiamo visto che il problema dell'accoppiamento di cardinalità massima equivale ad un problema di flusso massimo, che a sua volta equivale ad un problema di flusso di costo minimo avente le soluzioni di base a componenti intere. In tal caso  $P$  e  $\text{conv } \Omega$  coincidono grazie al Teorema dell'interrezza. Il seguente esempio mostra che ciò non è vero in generale.



Un accoppiamento ottimo è dato da:

$$x_{12} = 1, \quad x_{13} = 0, \quad x_{25} = 0, \quad x_{34} = 1, \quad x_{45} = 0,$$

di costo 2, mentre la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  di costo  $\frac{5}{2}$ , quindi  $P \neq \text{conv } \Omega$ .

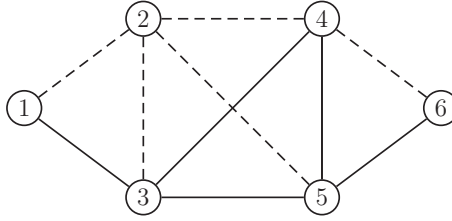
Il seguente risultato caratterizza il poliedro del problema dell'accoppiamento.

**Teorema 11.2.1.** *Sia  $U \subseteq N$  un sottoinsieme di nodi di cardinalità dispari ed indichiamo con  $A_{est}(U)$  l'insieme degli archi che hanno entrambi gli estremi in  $U$ . Allora,  $\text{conv } \Omega$  è ottenuto aggiungendo ai vincoli di  $P$  tutti i vincoli della forma:*

$$\sum_{e \in A_{est}(U)} x_e \leq \frac{|U| - 1}{2}$$

*al variare dell'insieme  $U$  di cardinalità dispari, dove  $|U|$  indica la cardinalità di  $U$ .*

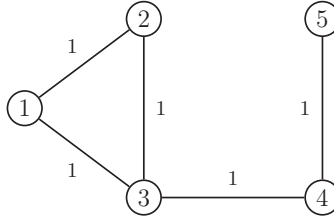
Una copertura per archi, in un grafo non orientato  $G = (N, A)$ , è un sottoinsieme di archi  $F \subseteq A$  tale che, per ogni nodo  $i \in N$ , esiste almeno un arco di  $F$  che incide sul nodo  $i$ . Ad esempio nel seguente grafo gli archi tratteggiati forniscono una copertura per archi:



Il problema è di trovare la copertura per archi di costo minimo. In questo caso abbiamo:

$$P = \left\{ x \in [0, 1]^{|A|} : \sum_{e \in A_{inc}(i)} x_e \geq 1, \quad \forall i \in N \right\}.$$

Anche in questo problema  $P$  non coincide con  $\text{conv } \Omega$ , come mostra il controesempio del seguente grafo, i cui archi hanno costo unitario:



Per coprire il grafo sono necessari 3 archi, il cui costo totale è 3; mentre l'ottimo del rilassamento continuo è  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$  e costa  $\frac{5}{2}$ .

Il seguente teorema caratterizza il poliedro della copertura per archi.

**Teorema 11.2.2.** *Sia  $V$  un sottoinsieme di nodi di cardinalità dispari ed indichiamo con  $A_{inc}(V)$  l'insieme degli archi incidenti in almeno un nodo di  $V$ . Allora  $\text{conv } \Omega$  è ottenuto aggiungendo ai vincoli di  $P$  tutti i vincoli della forma:*

$$\sum_{e \in A_{inc}(V)} x_e \geq \frac{|V| + 1}{2}$$

*al variare dell'insieme  $V$  di cardinalità dispari.*

Le disuguaglianze che, aggiunte ai vincoli nei due problemi precedenti, caratterizzano l'involucro convesso di  $\Omega$  rappresentano due fondamentali esempi in cui il problema di caratterizzare  $\text{conv } \Omega$  è stato risolto.

## 11.3 Piani di taglio

**Definizione 11.3.1.** La disequazione  $\pi^\top x \leq \pi_0$  è detta disuguaglianza valida (DV) per l'insieme  $\Omega$  se

$$\pi^\top x \leq \pi_0 \quad \forall x \in \Omega.$$

**Teorema 11.3.1.** Se  $\pi^\top x \leq \pi_0$  è una DV per  $\Omega$ , allora è una DV anche per  $\text{conv } \Omega$ .

**Dimostrazione.** Se  $x \in \text{conv } \Omega$ , allora  $x = \sum_{i \in I} \gamma_i x^i$ , dove  $x^i \in \Omega$ ,  $\gamma_i \geq 0$  e  $\sum_{i \in I} \gamma_i = 1$ , perciò:

$$\pi^\top x = \sum_{i \in I} \gamma_i \pi^\top x^i \leq \pi_0 \sum_{i \in I} \gamma_i = \pi_0.$$

□

Aggiungendo disuguaglianze valide per  $\Omega$  ai vincoli che definiscono il poliedro  $P$ , si costruiscono poliedri contenenti  $\Omega$ , che approssimano meglio  $\text{conv } \Omega$ .

Ci sono parecchi metodi generali per costruire DV per  $\text{conv } \Omega$ . Partiamo dall'osservazione che ogni riga di  $Ax \leq b$  è una DV per  $\Omega$ . Un modo possibile per ottenere DV è dato dalla tecnica dell'arrotondamento. Si basa sull'osservazione che se

$$\sum_{i=1}^n \pi_i x_i \leq \pi_0$$

è una DV per  $\Omega$ , allora anche

$$\sum_{i=1}^n \lfloor \pi_i \rfloor x_i \leq \pi_0$$

è una DV per  $\Omega$ , in quanto  $x \geq 0$ . Inoltre anche

$$\sum_{i=1}^n \lfloor \pi_i \rfloor x_i \leq \lfloor \pi_0 \rfloor$$

è una DV per  $\Omega$  perché  $x \in \mathbb{Z}^n$ .

Una sottoclasse fondamentale di DV è quella dei piani di taglio.

**Definizione 11.3.2.** Sia  $\bar{x}$  l'ottimo del rilassamento continuo. Una disuguaglianza valida  $\pi^\top x \leq \pi_0$  per  $\Omega$  tale che  $\pi^\top \bar{x} > \pi_0$  si dice piano di taglio.

L'idea alla base del metodo dei piani di taglio è la seguente: se  $Q$  è un poliedro contenente  $\Omega$  e la soluzione ottima  $\hat{x}$  di  $\max_{x \in Q} c^\top x$  appartiene ad  $\Omega$ , allora  $\hat{x}$  è ottima anche per  $\max_{x \in \Omega} c^\top x$ ; altrimenti si costruisce un piano di taglio  $\pi^\top x \leq \pi_0$ , che non sia verificata da  $\hat{x}$  (cioè  $\pi^\top \hat{x} > \pi_0$ ), in modo da tagliare fuori il punto  $\hat{x}$  e poi risolvere il nuovo problema:

$$\begin{cases} \max & c^\top x \\ & x \in Q \\ & \pi^\top x \leq \pi_0 \end{cases}$$

Un insieme classico di piani di taglio è quello dei **piani di taglio di Gomory**. Supponiamo che il problema di PLI sia nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (11.4)$$

e che  $B$  sia una base ottima del rilassamento continuo di (11.4), poniamo:

$$A = (A_B \ A_N) \quad \text{e} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Poniamo:

$$\tilde{b} = \bar{x}_B \quad \text{e} \quad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N.$$

Abbiamo allora il seguente risultato.

**Teorema 11.3.2.** *Se  $\tilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$ , allora la disuguaglianza:*

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\} \quad (11.5)$$

*è un piano di taglio per il problema (11.4).*

**Dimostrazione.** Fissato un arbitrario  $x \in \Omega$ , abbiamo che:

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b,$$

quindi

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N = \bar{x}_B - \tilde{A} x_N.$$

Definendo il vettore  $\tilde{x} = x_B$ , si ha  $\tilde{x} = \tilde{b} - \tilde{A} x_N$ . Quindi, abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_r &= \tilde{b}_r - \sum_{j \in N} \tilde{a}_{rj} x_j \\ &= [\tilde{b}_r] + \{\tilde{b}_r\} - \sum_{j \in N} ([\tilde{a}_{rj}] + \{\tilde{a}_{rj}\}) x_j \\ &= [\tilde{b}_r] + \{\tilde{b}_r\} - \sum_{j \in N} [\tilde{a}_{rj}] x_j - \sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j, \end{aligned}$$

di conseguenza:

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j - \{\tilde{b}_r\} = [\tilde{b}_r] - \sum_{j \in N} [\tilde{a}_{rj}] x_j - \tilde{x}_r \in \mathbb{Z}. \quad (11.6)$$

Inoltre si ha:

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j - \{\tilde{b}_r\} \geq -\{\tilde{b}_r\} > -1. \quad (11.7)$$

Dalle relazioni (11.6) e (11.7), otteniamo che:

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\}.$$



### 11.3 PIANI DI TAGLIO

Poiché l'ultima disuguaglianza è valida per un arbitrario punto  $x \in \Omega$ , abbiamo dimostrato che la (11.5) è una DV per  $\Omega$ . Inoltre la (11.5) non è soddisfatta da  $\bar{x}$ , infatti:

$$0 = \sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} \bar{x}_j < \{\tilde{b}_r\},$$

quindi, la (11.5) è un piano di taglio.  $\square$

**Esempio 11.3.1.** Consideriamo di nuovo il problema (11.2) e riscriviamolo nella forma (11.4) aggiungendo le variabili di scarto  $x_3$  e  $x_4$ :

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 + x_3 = 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 + x_4 = 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^4. \end{cases}$$

In questo caso abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 35 \end{pmatrix}, \quad c^T = (1 \quad 3 \quad 0 \quad 0).$$

La base ottima del rilassamento continuo è  $B = \{1, 2\}$ , quindi:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} \\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38} \end{pmatrix}$$

ed, inoltre:

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} \\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38} \end{pmatrix}.$$

Il vettore  $\tilde{b} = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})^T$  ha entrambe le componenti non intere, quindi, ci sono due possibili tagli di Gomory.

$r = 1$  Il taglio è:

$$\left\{ -\frac{1}{19} \right\} x_3 + \left\{ \frac{5}{38} \right\} x_4 \geq \left\{ \frac{7}{2} \right\},$$

cioè:

$$\frac{18}{19} x_3 + \frac{5}{38} x_4 \geq \frac{1}{2},$$

ossia:

$$36x_3 + 5x_4 \geq 19,$$

che nelle variabili  $(x_1, x_2)$  equivale a:

$$36(21 - x_1 - 5x_2) + 5(35 - 8x_1 - 2x_2) \geq 19$$

cioè:

$$2x_1 + 5x_2 \leq 24.$$

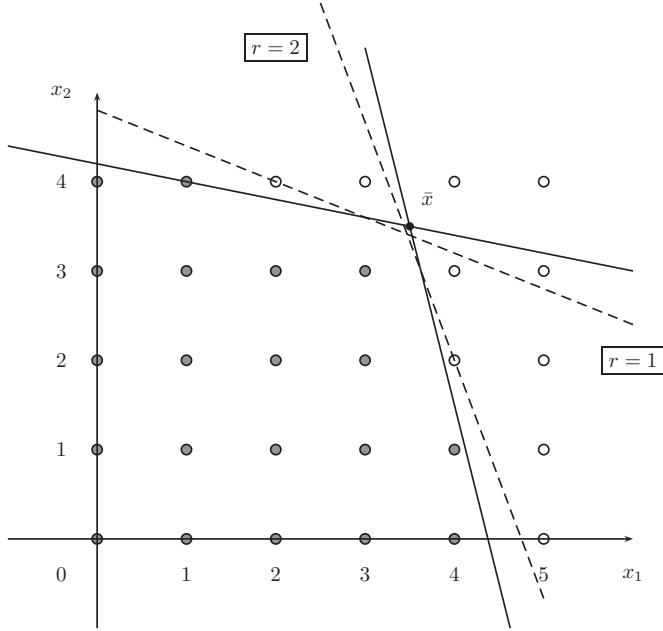
$\boxed{r=2}$  In questo caso il taglio è:

$$\left\{\frac{4}{19}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{38}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{7}{2}\right\},$$

che, ricavando le variabili  $(x_1, x_2)$ , equivale a:

$$8x_1 + 3x_2 \leq 38.$$

I due tagli di Gomory sono rappresentati nella seguente figura.



□

Osserviamo che è possibile ottenere un ulteriore piano di taglio nel caso in cui non sia intero il valore ottimo del rilassamento continuo.

**Teorema 11.3.3.** *Se  $c_B^T \bar{x}_B \notin \mathbb{Z}$ , allora:*

$$\sum_{j \in N} \{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)_j\} x_j \geq \{-c_B^T \bar{x}_B\}$$

*è un piano di taglio per il problema (11.4).*

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 11.3.2.

# Capitolo 12

## Metodo del *Branch and Bound*

### 12.1 Regole generali

Supponiamo che il problema di PLI da risolvere:

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (\text{P})$$

abbia una regione ammissibile limitata. Essendo finito il numero delle soluzioni ammissibili, si potrebbe calcolare la funzione obiettivo in tali soluzioni e trovare l'ottimo confrontando i valori ottenuti. Un modo per esplorare tutte le soluzioni ammissibili è costruire il cosiddetto albero di enumerazione totale. Esso ha per radice il problema (P); facendo una partizione della regione ammissibile  $\Omega$  di (P) in due o più sottoinsiemi  $\Omega_1, \dots, \Omega_p$  si ottengono i figli del nodo radice, che corrispondono ai sottoproblemi di (P) aventi come regioni ammissibili gli insiemi  $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ ; il resto dell'albero viene generato allo stesso modo, fino ad arrivare alle foglie che corrispondono a sottoproblemi di (P) aventi la regione ammissibile vuota o costituita da un solo elemento.

**Esempio 12.1.1.** Supponiamo che il problema (P) sia:

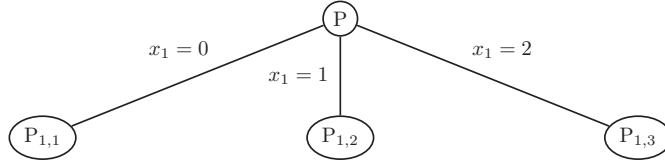
$$\begin{cases} \max & 5x_1 + 6x_2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2. \end{cases}$$

I vincoli del problema impongono che la variabile  $x_1$  possa assumere solamente i valori 0,1 oppure 2. Partizioniamo la regione ammissibile  $\Omega$  in tre sottoinsiemi:

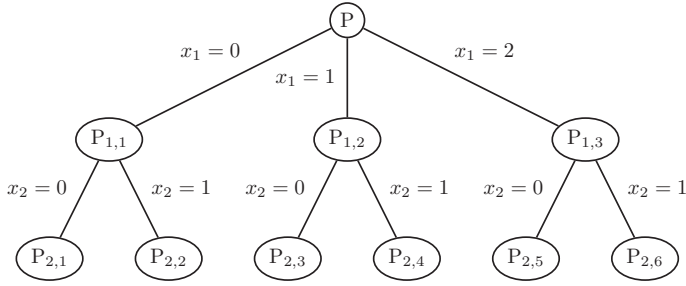
$$\Omega = (\Omega \cap \{x_1 = 0\}) \cup (\Omega \cap \{x_1 = 1\}) \cup (\Omega \cap \{x_1 = 2\}),$$

che corrispondono, sull'albero di enumerazione totale, a tre figli del nodo radice:

## 12. METODO DEL *Branch and Bound*



Analogamente a prima,  $x_2$  può assumere solo i valori 0 oppure 1, quindi ciascuno dei figli del nodo (P) ha a sua volta due figli. L'intero albero di enumerazione totale è il seguente:



Le foglie  $P_{2,1}, \dots, P_{2,5}$  corrispondono a soluzioni ammissibili di (P), mentre la foglia  $P_{2,6}$  corrisponde al vettore  $x = (2, 1)$  che non è ammissibile. I valori della funzione obiettivo sulle foglie  $P_{2,1}, \dots, P_{2,5}$  sono rispettivamente 0, 6, 5, 11, 10, pertanto la soluzione ottima di (P) si ottiene in corrispondenza della foglia  $P_{2,4}$ , cioè  $x^* = (1, 1)$ .  $\square$

In realtà, il numero delle soluzioni ammissibili cresce esponenzialmente rispetto al numero delle variabili del problema, rendendo impraticabile tale strategia risolutiva.

Una strategia che esplora l'albero dell'enumerazione totale senza dover necessariamente enumerare tutte le foglie è il cosiddetto metodo del *Branch and Bound*.

Indichiamo con  $v(P)$  il valore ottimo del problema (P), con  $v_I(P)$  e  $v_S(P)$  rispettivamente una valutazione inferiore ed una superiore del valore ottimo di (P), cioè:

$$v_I(P) \leq v(P) \leq v_S(P),$$

e con  $(P_{i,j})$  il  $j$ -esimo problema a livello  $i$  dell'albero di enumerazione.

Le tecniche più comuni di *Bound* (valutazione) che forniscono una valutazione superiore dell'ottimo di un generico sottoproblema  $(P_{i,j})$  sono:

- eliminazione di uno o più vincoli,
- somma di vincoli: sostituire due o più vincoli con la loro somma,
- rilassamento continuo: cambiare  $x \in \mathbb{Z}^n$  con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

- rilassamento lagrangiano (vedi paragrafo 12.2).

Alcune tecniche per avere valutazioni inferiori di (P) sono:

- euristiche per il calcolo di una soluzione ammissibile (se  $x$  è ammissibile per (P), allora  $c^T x = v_I(P)$ ).
- risoluzione di un problema ottenuto aggiungendo uno o più vincoli a (P) (restrizione).

Per le tecniche di *Branch* (visita implicita) saranno ora descritte le regole più comuni.

**Teorema 12.1.1.** *Sia  $x$  una soluzione ammissibile di (P) e  $v_I(P) = c^T x$ .*

1. *Se  $v_S(P_{i,j}) \leq v_I(P)$ , oppure la regione ammissibile di  $(P_{i,j})$  è vuota, allora si può effettuare una visita implicita del nodo  $P_{i,j}$ , cioè, nel sottoalbero di radice  $P_{i,j}$ , non esiste una soluzione ammissibile di valore superiore a  $x$ .*
2. *Se  $v_S(P_{i,j}) > v_I(P)$  e l'ottimo  $\bar{x}$  del rilassamento di  $(P_{i,j})$  è ammissibile per (P), allora  $\bar{x}$  è una soluzione migliore di  $x$ , quindi si aggiorna  $x$  con  $\bar{x}$  e si può effettuare una visita implicita di  $P_{i,j}$ .*

**Dimostrazione.**

1. Se la regione ammissibile di  $(P_{i,j})$  è vuota, allora nel sottoalbero di radice  $P_{i,j}$  non ci sono soluzioni ammissibili. Se, invece,  $v_S(P_{i,j}) \leq v_I(P)$ , allora si ha che

$$v(P_{i,j}) \leq v_S(P_{i,j}) \leq v_I(P) \leq v(P)$$

e quindi nel sottoalbero di radice  $P_{i,j}$  non ci sono soluzioni ammissibili migliori di  $x$ .

2. Se  $\bar{x}$  è l'ottimo del rilassamento di  $(P_{i,j})$  ed è ammissibile per (P), allora nel sottoalbero di radice  $P_{i,j}$  non ci sono soluzioni ammissibili per (P) migliori di  $\bar{x}$ . Poiché

$$c^T \bar{x} = v_S(P_{i,j}) > v_I(P) = c^T x,$$

allora  $\bar{x}$  rappresenta una soluzione migliore di  $x$ . Pertanto si può procedere a una visita implicita di  $P_{i,j}$  dopo aver aggiornato la soluzione corrente  $x$  con  $\bar{x}$ .

□

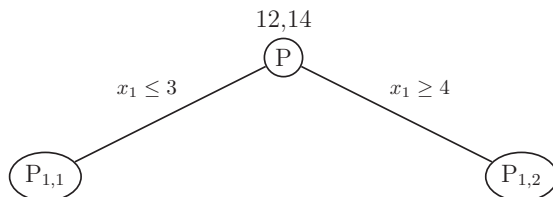
Osserviamo che in generale  $v_S(P_{i,j})$  può essere maggiore o minore di  $v(P)$ , perché esso è una valutazione superiore del valore ottimo di  $(P_{i,j})$ , la cui regione ammissibile è a sua volta una restrizione della regione ammissibile di (P).

**Esempio 12.1.2.** Risolviamo con il metodo del *Branch and Bound* il problema visto nell'Esempio 11.1.1:

$$\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2. \end{cases} \quad (P)$$

## 12. METODO DEL *Branch and Bound*

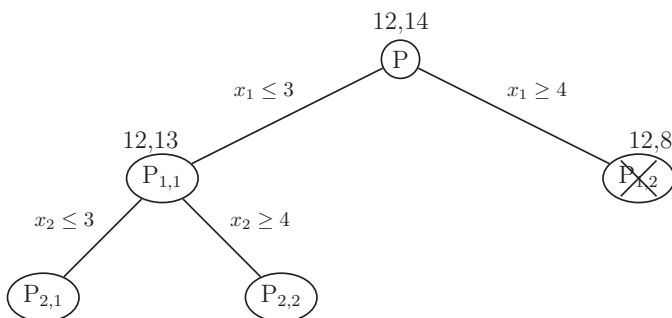
La soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(7/2, 7/2)$  per cui  $v_S(P) = 14$ . Arrotondando per difetto le componenti di tale soluzione otteniamo la soluzione ammissibile  $(3, 3)$  che fornisce  $v_I(P) = 12$ . Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione totale istanziando la variabile  $x_1$  che ha un valore frazionario ( $x_1 = 3.5$ ) nella soluzione ottima del rilassamento continuo e distinguiamo due casi:  $x_1 \leq 3$  oppure  $x_1 \geq 4$  in modo che la soluzione  $(7/2, 7/2)$  non sia ottima per nessuno dei rilassamenti continui dei nodi  $P_{1,1}$  e  $P_{1,2}$  al primo livello. Vicino ad ogni nodo  $P_{i,j}$  indichiamo nell'ordine i valori  $v_I(P)$  e  $v_S(P_{i,j})$ .



La soluzione ottima del rilassamento continuo di  $P_{1,1}$  è  $(3, \frac{18}{5})$  di valore 13.8, quindi  $v_S(P_{1,1}) = 13 > 12 = v_I(P)$ , pertanto non possiamo fare una visita implicita di  $P_{1,1}$  che rimane quindi aperto.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di  $P_{1,2}$  è  $(4, \frac{3}{2}, 0)$  di valore 8.5, quindi  $v_S(P_{1,2}) = 8 < 12 = v_I(P)$ , pertanto è possibile fare una visita implicita di  $P_{1,2}$ , ossia chiudere il nodo.

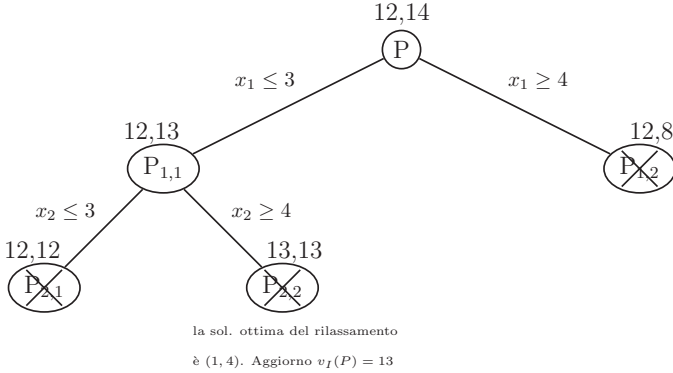
Dal nodo  $P_{1,1}$  istanziamo la variabile  $x_2$  che ha valore frazionario nella soluzione ottima del rilassamento continuo di  $P_{1,1}$ :



La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,1}$  è  $(3, 3)$ , quindi  $v_S(P_{2,1}) = 12 = v_I(P)$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{2,1}$ .

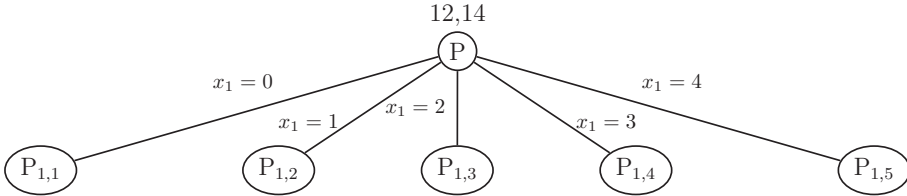
La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,2}$  è  $(1, 4)$ , quindi  $v_S(P_{2,2}) = 13 > 12 = v_I(P)$ . Poiché tale soluzione è ammissibile aggiorniamo la vecchia soluzione ammissibile  $(3, 3)$  con la nuova  $(1, 4)$ , poniamo  $v_I(P) = 13$  e chiudiamo il nodo  $P_{2,2}$ .

## 12.1 REGOLE GENERALI



Avendo chiuso tutti i nodi dell'albero di enumerazione totale possiamo concludere che la soluzione ottima del problema è  $(1, 4)$  di valore 13.  $\square$

**Esempio 12.1.3.** Risolviamo ora il problema dell'esempio precedente applicando il metodo del *Branch and Bound* con un albero di enumerazione totale non binario. Dai vincoli possiamo dedurre che  $x_1 \leq 4$ , quindi  $x_1$  può assumere 5 valori possibili: 0,1,2,3,4 oppure 5. In questo modo costruiamo 5 nodi al primo livello dell'albero di enumerazione totale:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di  $P_{1,1}$  è  $(0, \frac{21}{5})$ , quindi  $v_S(P_{1,1}) = 12 = v_I(P)$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{1,1}$ .

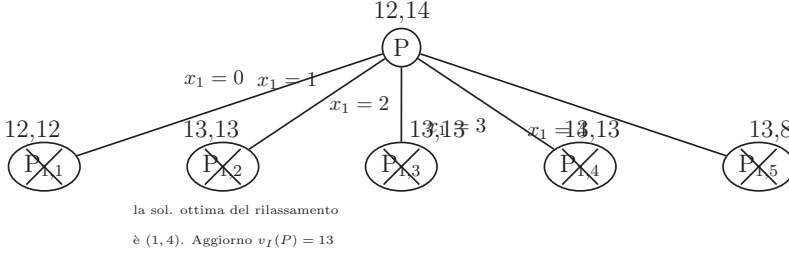
La soluzione ottima del rilassamento continuo di  $P_{1,2}$  è  $(1, 4)$  di valore 13, quindi aggiorniamo la soluzione ammissibile, poniamo  $v_I(P) = 13$  e chiudiamo anche il nodo  $P_{1,2}$ .

La soluzione ottima del rilassamento continuo di  $P_{1,3}$  è  $(2, \frac{19}{5})$ , quindi  $v_S(P_{1,3}) = 13 = v_I(P)$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{1,3}$ .

La soluzione ottima del rilassamento continuo di  $P_{1,4}$  è  $(3, \frac{18}{5})$ , quindi  $v_S(P_{1,4}) = 13 = v_I(P)$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{1,4}$ .

La soluzione ottima del rilassamento continuo di  $P_{1,5}$  è  $(4, \frac{3}{2})$ , quindi  $v_S(P_{1,5}) = 8 < 13 = v_I(P)$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{1,5}$ .

## 12. METODO DEL *Branch and Bound*



Avendo chiuso tutti i nodi dell'albero di enumerazione totale possiamo concludiamo che la soluzione ottima del problema è (1,4).  $\square$

## 12.2 Rilassamento lagrangiano

Supponiamo che un problema di PLI sia scritto nella forma:

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ & Ax = b \\ & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^n, \end{cases} \quad (P)$$

in cui sono evidenziati  $m$  vincoli di uguaglianza  $Ax = b$ . Supponiamo che tali vincoli rendano difficile la risoluzione di (P), ossia che il problema (P) senza tali vincoli sarebbe facile da risolvere. Il rilassamento lagrangiano di (P), rispetto ai vincoli  $Ax = b$ , è definito come:

$$\begin{cases} \max & L(x, \mu) := c^T x + \mu^T (Ax - b) \\ & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^n, \end{cases} \quad (P_\mu)$$

dove  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ; la funzione  $L(x, \mu)$  è chiamata lagrangiana del problema. Il problema  $(P_\mu)$  è più facile da risolvere rispetto al problema (P), poiché i vincoli “difficili”  $Ax = b$  sono stati inseriti nella funzione obiettivo. Notiamo che il rilassamento lagrangiano con parametro  $\mu = 0$  non è altro che il rilassamento ottenuto eliminando i vincoli  $Ax = b$ . Osserviamo che se  $x$  è una soluzione ammissibile di (P), in particolare abbiamo  $Ax = b$ , quindi si ha:

$$L(x, \mu) = c^T x \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^m,$$

e pertanto

$$v(P_\mu) = \max_{\substack{Bx \leq d \\ x \in \mathbb{Z}^n}} L(x, \mu) \geq \max_{\substack{Ax=b \\ Bx \leq d \\ x \in \mathbb{Z}^n}} L(x, \mu) = \max_{\substack{Ax=b \\ Bx \leq d \\ x \in \mathbb{Z}^n}} c^T x = v(P),$$

ossia, il valore ottimo del rilassamento lagrangiano è una valutazione superiore del valore ottimo di (P) per ogni scelta del parametro  $\mu \in \mathbb{R}^m$ . Da questa relazione otteniamo anche il seguente risultato.



**Teorema 12.2.1.** *Se  $x$  è una soluzione ottima di  $(P_\mu)$  e  $x$  è ammissibile per  $(P)$ , allora  $x$  è una soluzione ottima di  $(P)$ .*

Definiamo ora la funzione che associa a  $\mu$  il valore ottimo di  $(P_\mu)$ :

$$w(\mu) := v(P_\mu).$$

Per quanto abbiamo detto sopra, tutti i valori della funzione  $w$  sono valutazioni superiori di  $v(P)$ , quindi è naturale cercare la migliore di tali valutazioni superiori, ossia cercare il minimo della funzione  $w$ :

$$\begin{cases} \min w(\mu) \\ \mu \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (\text{D})$$

Il problema (D) è difficile da risolvere, perché la funzione  $w$  non è differenziabile. Tuttavia, tale funzione ha la proprietà di essere convessa: infatti, dati  $\mu^1, \mu^2 \in \mathbb{R}^m$  e  $t \in [0, 1]$ , si ha:

$$\begin{aligned} w(t\mu^1 + (1-t)\mu^2) &= \max_{\substack{Bx \leq d \\ x \in \mathbb{Z}^n}} [c^\top x + t\mu^1{}^\top (Ax - b) + (1-t)\mu^2{}^\top (Ax - b)] \\ &= \max_{\substack{Bx \leq d \\ x \in \mathbb{Z}^n}} [t(c^\top x + \mu^1{}^\top (Ax - b)) + (1-t)(c^\top x + \mu^2{}^\top (Ax - b))] \\ &\leq t \max_{\substack{Bx \leq d \\ x \in \mathbb{Z}^n}} [c^\top x + \mu^1{}^\top (Ax - b)] + (1-t) \max_{\substack{Bx \leq d \\ x \in \mathbb{Z}^n}} [c^\top x + \mu^2{}^\top (Ax - b)] \\ &= tw(\mu^1) + (1-t)w(\mu^2). \end{aligned}$$

Per minimizzare una funzione convessa, non differenziabile, esistono i cosiddetti metodi del sottogradiente che è una generalizzazione del concetto di gradiente.

**Definizione 12.2.1.** Sia  $w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa. Un vettore  $g \in \mathbb{R}^m$  è detto un sottogradiente di  $w$  nel punto  $\mu^*$  se:

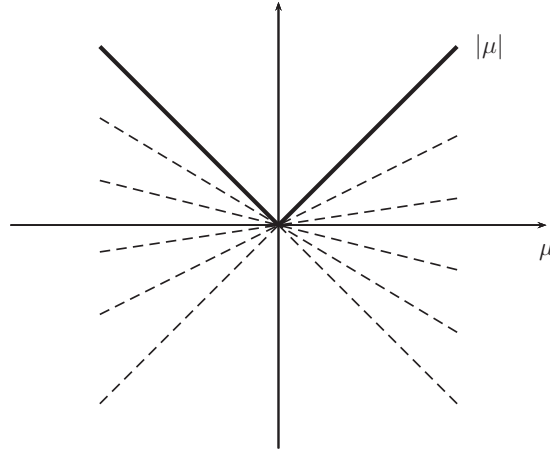
$$w(\mu) \geq g^\top (\mu - \mu^*) + w(\mu^*) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^m.$$

L'insieme dei sottogradienti di  $w$  in  $\mu^*$  è detto sottodifferenziale di  $w$  in  $\mu^*$  e viene indicato con  $\partial w(\mu^*)$ . Se la funzione  $w$  è differenziabile in  $\mu^*$ , allora in tale punto il sottogradiente è unico e coincide con il gradiente.

**Esempio 12.2.1.** Consideriamo la funzione di una variabile  $w(\mu) = |\mu|$ , che è convessa su  $\mathbb{R}$ . Un sottogradiente di  $w$  nel punto  $\mu^* = 0$  è un numero  $g \in \mathbb{R}$  tale che

$$|\lambda| \geq g\mu, \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

ossia è il coefficiente angolare di una retta il cui grafico sta “sotto” al grafico di  $w$ . Pertanto si ha che  $\partial w(0) = [-1, 1]$ .



□

Il sottodifferenziale è utile per stabilire una condizione di ottimalità per funzioni convesse non differenziabili.

**Teorema 12.2.2.** *Se  $w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa, allora  $\mu^*$  è il minimo di  $w$  su  $\mathbb{R}^m$  se e solo se  $0 \in \partial w(\mu^*)$ .*

I metodi del sottogradiente generalizzano, a funzioni non differenziabili, l'idea del metodo del gradiente per funzioni differenziabili (che vedremo in seguito), ossia, da un generico punto  $\mu^k$ , cercano il successivo punto  $\mu^{k+1}$ , lungo la direzione di un sottogradiente calcolato in  $\mu^k$ . Si dimostrerà che il vettore opposto al gradiente di una funzione differenziabile è sempre una direzione di discesa mentre il vettore opposto ad un sottogradiente, in generale, non lo è. Consideriamo ad esempio la funzione  $w(\mu) = |\mu|$  nel punto  $\mu^* = 0$ : se  $g$  è un sottogradiente diverso da 0, allora il vettore  $-g$  è una direzione addirittura di *ascesa* per  $w$ .

Quindi, i metodi del sottogradiente non sono metodi di discesa. Descriviamo ora una versione di base del metodo del sottogradiente per minimizzare una funzione convessa  $w$  definita su  $\mathbb{R}^m$ .

## Metodo del sottogradiente

1. Scegli  $\mu^0 \in \mathbb{R}^m$  e  $k := 0$ .
2. Calcola un sottogradiente  $g^k \in \partial w(\mu^k)$  e poni

$$\mu^{k+1} := \mu^k + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{g^k}{\|g^k\|}.$$

3. **if**  $0 \in \partial w(\mu^{k+1})$  **then STOP** ( $\mu^{k+1}$  è un minimo di  $w$ ).  
**else**  $k := k + 1$  e torna al passo 2.

Abbiamo il seguente teorema di convergenza.

**Teorema 12.2.3.** *Se  $w$  è limitata inferiormente, allora il metodo del sottogradiente genera una successione  $\{\mu^k\}$  tale che:*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} w(\mu^k) = \inf_{\mu \in \mathbb{R}^m} w(\mu).$$

In generale, il calcolo di un sottogradiente non è un'operazione semplice. Nel caso del problema (D) però è possibile caratterizzare il sottodifferenziale della funzione  $w$ .

**Teorema 12.2.4.** *Supponiamo che l'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n : Bx \leq d, x \in \mathbb{Z}^n\}$  sia non vuoto e limitato. Per ogni vettore  $\mu \in \mathbb{R}^m$ , indichiamo con  $S(\mu)$  l'insieme delle soluzioni ottime del rilassamento lagrangiano  $(P_\mu)$ . Allora, per ogni  $\mu \in \mathbb{R}^m$ , si ha che:*

$$\partial w(\mu) = \text{conv} \{Ax - b : x \in S(\mu)\}.$$

Se vogliamo risolvere il problema (D) con il metodo del sottogradiente, alla  $k$ -esima iterazione dobbiamo calcolare un sottogradiente di  $w$  nel punto  $\mu^k$ . Questo può essere fatto sfruttando il Teorema 12.2.4: infatti, se calcoliamo una soluzione ottima  $x^k$  del rilassamento lagrangiano  $(P_{\mu^k})$ , allora il vettore  $Ax^k - b$  è un sottogradiente di  $w$  nel punto  $\mu^k$ .

**Esempio 12.2.2.** Consideriamo il seguente problema di PLI:

$$\begin{cases} \max & 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 14 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \quad (\text{P})$$

Consideriamo il rilassamento lagrangiano di (P) rispetto al vincolo di uguaglianza:

$$\begin{cases} \max & 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + \mu(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7) \\ & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 14 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \quad (\text{P}_\mu)$$

## 12. METODO DEL *Branch and Bound*

Applichiamo il metodo del sottogradiente per minimizzare la funzione  $w(\mu) = v(P_\mu)$ . Partiamo dal punto  $\mu^0 = 0$  e risolviamo il rilassamento lagrangiano  $(P_{\mu^0})$ . La soluzione ottima è  $(0, 0, 7)$  ed il valore ottimo è  $w(\mu^0) = 63$ . Per il Teorema 12.2.4, un sottogradiente di  $w$  in  $\mu^0$  è:

$$g^0 = 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 7 - 7 = 7.$$

Calcoliamo:

$$\mu^1 = \mu^0 + \frac{g^0}{|g^0|} = 0 + \frac{7}{7} = 1.$$

Risolvendo il rilassamento lagrangiano  $P_{\mu^1}$ , troviamo che il valore ottimo è  $w(\mu^1) = 56$  e la soluzione ottima è ancora  $(0, 0, 7)$ , perciò  $g^1 = 7$  è un sottogradiente di  $w$  anche nel punto  $\mu^1$ . Calcoliamo ora

$$\mu^2 = \mu^1 + \frac{1}{2} \frac{g^1}{|g^1|} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{7} = \frac{3}{2},$$

e risolviamo  $P_{\mu^2}$  trovando come valore ottimo  $w(\mu^2) = 52.5$ . □

# Capitolo 13

## Caricamento

Dato un contenitore di volume  $b$  e  $n$  oggetti aventi ciascuno un valore  $c_i$  ed un volume  $a_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , dobbiamo scegliere quali oggetti inserire nel contenitore in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti caricati. In tale schema rientrano anche alcuni problemi di gestione di missioni scientifiche (spaziali, al Polo, ecc.). Tale problema è noto in letteratura come problema dello zaino (*knapsack problem*). Se ad ogni oggetto  $i$  associamo una variabile binaria  $x_i$ :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ viene caricato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora tale problema può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (13.1)$$

**Esempio 13.0.3.** Supponiamo di voler investire un capitale di 100 mila euro. Abbiamo a disposizione 9 investimenti possibili e per ciascuno di essi conosciamo il rendimento atteso e il costo attuale:

| Investimento                            | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Rendimento atteso<br>(migliaia di euro) | 50 | 65 | 35 | 16 | 18 | 45 | 45 | 40 | 25 |
| Costo<br>(migliaia di euro)             | 40 | 50 | 25 | 10 | 10 | 40 | 35 | 30 | 20 |

Compatibilmente con il capitale disponibile, vogliamo scegliere gli investimenti che forniscano il massimo rendimento possibile. Il problema si può formulare come un problema

di caricamento:

$$\begin{cases} \max 50x_1 + 65x_2 + 35x_3 + 16x_4 + 18x_5 + 45x_6 + 45x_7 + 40x_8 + 25x_9 \\ 40x_1 + 50x_2 + 25x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 40x_6 + 35x_7 + 30x_8 + 20x_9 \leq 100 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 9. \end{cases}$$

□

Abbiamo considerato un problema in cui ciascun oggetto poteva essere caricato o meno, ovvero ciascuna variabile era binaria. Possiamo però considerare anche problemi in cui le variabili possono assumere valore intero. Ciò corrisponde a situazioni in cui possono essere caricate più unità dello stesso oggetto. In questo caso il modello matematico è lo stesso di (13.1), con l'unica differenza che il vincolo  $x_i \in \{0, 1\}$  viene sostituito con il vincolo  $x_i \in \mathbb{Z}_+$ .

Nel caso in cui per ogni oggetto siano note altre caratteristiche oltre al volume (ad esempio il peso) e sia prefissata una capacità superiore per ognuna di tali caratteristiche, allora il problema di massimizzare il valore complessivo degli oggetti caricati, tenendo conto di questo insieme di vincoli, viene chiamato problema di multizaino. Ad esempio, se ogni oggetto  $i$  ha un volume  $a_i$  ed un peso  $p_i$ , il contenitore ha un volume totale  $b$  e può pesare al massimo  $p$ , allora il problema viene formulato come:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq p \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

### 13.1 Risoluzione con il *Branch and Bound*

Esaminiamo ora come risolvere i problemi di caricamento applicando il metodo *Branch and Bound*. Definiamo il *rendimento* di una variabile  $x_i$  come il rapporto  $\frac{c_i}{a_i}$  tra il suo valore ed il suo volume, e supponiamo che le variabili siano poste in ordine decrescente di rendimento, cioè:

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}.$$

## Problemi a variabili binarie

Per trovare una valutazione superiore del valore ottimo consideriamo il rilassamento continuo, sostituendo i vincoli binari  $x_i \in \{0, 1\}$  con i vincoli continui  $0 \leq x_i \leq 1$ :

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (13.2)$$

Applicando la teoria della dualità lineare si può risolvere direttamente il problema (13.2) senza usare il metodo del simplesso. Infatti, se indichiamo con  $h$  l'indice per cui nel contenitore possono essere inseriti i primi  $h$  oggetti ma non i primi  $h + 1$  oggetti, cioè

$$\sum_{i=1}^h a_i \leq b \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{h+1} a_i > b,$$

allora la soluzione ottima del problema (13.2) è:

$$x_1 = 1, \dots, x_h = 1, \quad x_{h+1} = \frac{b - \sum_{i=1}^h a_i}{a_{h+1}}, \quad x_{h+2} = 0, \dots, x_n = 0.$$

Quindi una *valutazione superiore* del valore ottimo del problema è data da

$$v_S(P) = \left[ c_1 + \dots + c_h + \frac{c_{h+1} (b - \sum_{i=1}^h a_i)}{a_{h+1}} \right].$$

Per trovare una valutazione inferiore del valore ottimo consideriamo il seguente algoritmo *greedy*: inseriamo gli oggetti nel contenitore seguendo l'ordine decrescente dei rendimenti controllando che venga rispettato il vincolo di capacità. Tale algoritmo fornisce una soluzione ammissibile, ma non necessariamente una soluzione ottima.

Algoritmo *greedy* per problemi di caricamento a variabili binarie

```

for  $k = 1, \dots, n$  do
  if  $a_k \leq b$ 
    then  $x_k := 1, b := b - a_k$ 
  else  $x_k := 0$ 

```

Durante l'esplorazione dell'albero di enumerazione totale, se non è possibile chiudere un nodo  $P_{i,j}$ , allora istanziamo la variabile che ha valore frazionario nella soluzione ottima del rilassamento continuo corrispondente a  $P_{i,j}$ .

**Esempio 13.1.1.** Consideriamo il seguente problema di caricamento:

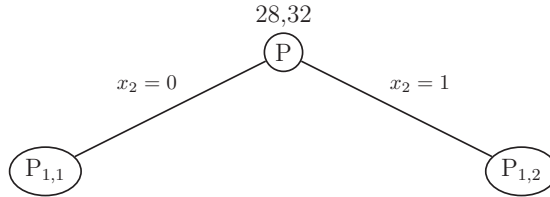
$$\begin{cases} \max & 10x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 24x_4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 7 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases} \quad (P)$$

Disponiamo le variabili in ordine decrescente di rendimento:

|            |   |     |     |   |
|------------|---|-----|-----|---|
| variabili  | 1 | 3   | 2   | 4 |
| rendimenti | 5 | 4.5 | 4.3 | 4 |

Applicando l'algoritmo *greedy* otteniamo la soluzione ammissibile  $(1, 0, 1, 0)$  e quindi  $v_I(P) = 28$ .

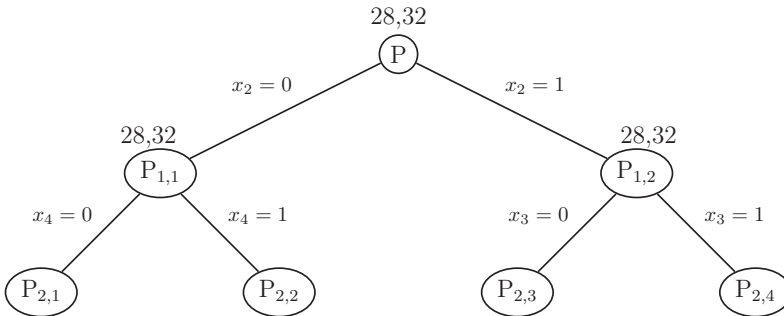
La soluzione del rilassamento continuo è  $(1, \frac{1}{3}, 1, 0)$ , quindi  $v_S(P) = 32$ . Poiché la seconda componente è frazionaria, istanziamo la variabile  $x_2$  per iniziare l'esplorazione dell'albero:



La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{1,1}$  è  $(1, 0, 1, \frac{1}{6})$ , quindi  $v_S(P_{1,1}) = 32 > 28$ , pertanto il nodo  $P_{1,1}$  rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{1,2}$  è  $(1, 1, \frac{1}{2}, 0)$ , quindi  $v_S(P_{1,2}) = 32 > 28$ , pertanto anche il nodo  $P_{1,2}$  rimane aperto.

Dal nodo  $P_{1,1}$  istanziamo la variabile  $x_4$ , mentre dal nodo  $P_{1,2}$  istanziamo la variabile  $x_3$ .





### 13.1 RISOLUZIONE CON IL *Branch and Bound*

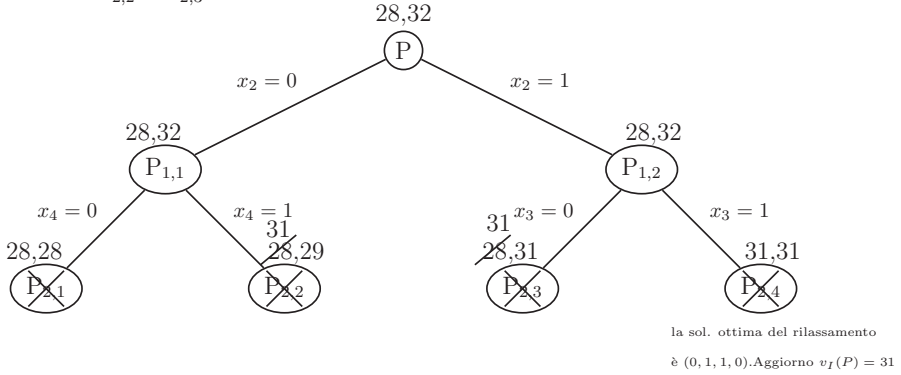
La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,1}$  è  $(1, 0, 1, 0)$ , quindi  $v_S(P_{2,1}) = 28$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{2,1}$ .

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,2}$  è  $(\frac{1}{2}, 0, 0, 1)$ , quindi  $v_S(P_{2,2}) = 29 > 28$ , pertanto il nodo  $P_{2,2}$  rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,3}$  è  $(1, 1, 0, \frac{1}{3})$ , quindi  $v_S(P_{2,3}) = 31 > 28$ , pertanto il nodo  $P_{2,3}$  rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,4}$  è  $(0, 1, 1, 0)$ , quindi  $v_S(P_{2,4}) = 31$ . Ma tale soluzione è anche ammissibile e ha un valore maggiore della soluzione ammissibile  $(1, 0, 1, 0)$  trovata con l'algoritmo greedy, quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 31$  e chiudiamo il nodo  $P_{2,4}$ .

A questo punto torniamo ai nodi aperti  $P_{2,2}$  e  $P_{2,3}$  e utilizziamo la nuova valutazione inferiore  $v_I(P) = 31$ . Poiché  $v_S(P_{2,2}) = 29 < 31$  e  $v_S(P_{2,3}) = 31$  possiamo chiudere entrambi i nodi  $P_{2,2}$  e  $P_{2,3}$ .



In conclusione la soluzione ottima del problema di caricamento è  $(0, 1, 1, 0)$  con valore uguale a 31.  $\square$

**Esempio 13.1.2.** Consideriamo il seguente problema di caricamento:

$$\begin{cases} \max & 21x_1 + 23x_2 + 9x_3 + 14x_4 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 7 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases} \quad (P)$$

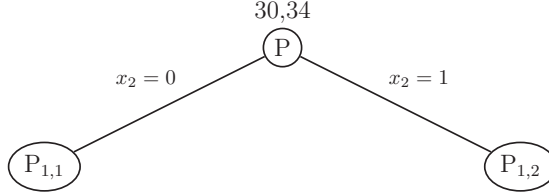
Le variabili sono già in ordine decrescente di rendimento:

| variabili  | 1   | 2   | 3   | 4   |
|------------|-----|-----|-----|-----|
| rendimenti | 5.2 | 4.6 | 4.5 | 2.3 |

Applicando l'algoritmo greedy otteniamo la soluzione ammissibile  $(1, 0, 1, 0)$  e quindi  $v_I(P) = 30$ .

La soluzione del rilassamento continuo è  $(1, \frac{3}{5}, 0, 0)$ , quindi  $v_S(P) = 34$ . Poiché la seconda componente è frazionaria, istanziamo la variabile  $x_2$  per iniziare l'esplorazione dell'albero:

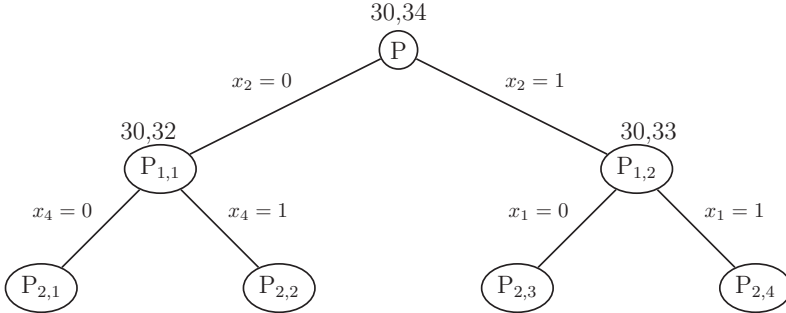
### 13. CARICAMENTO



La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{1,1}$  è  $(1, 0, 1, \frac{1}{6})$ , quindi  $v_S(P_{1,1}) = 32 > 30$ , pertanto il nodo  $P_{1,1}$  rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{1,2}$  è  $(\frac{1}{2}, 1, 0, 0)$ , quindi  $v_S(P_{1,2}) = 33 > 30$ , pertanto anche il nodo  $P_{1,2}$  rimane aperto.

Dal nodo  $P_{1,1}$  istanziamo la variabile  $x_4$ , mentre dal nodo  $P_{1,2}$  istanziamo la variabile  $x_1$ .

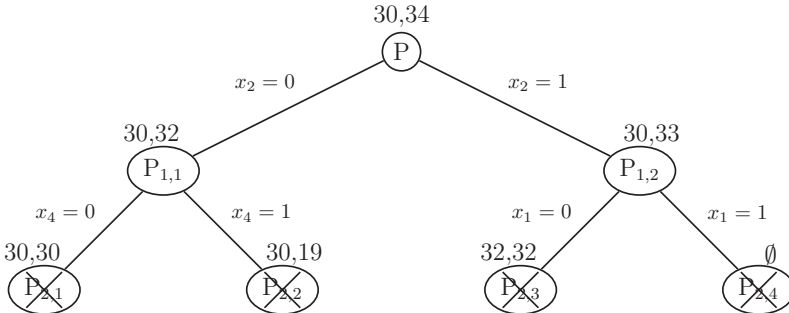


La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,1}$  è  $(1, 0, 1, 0)$ , quindi  $v_S(P_{2,1}) = 30$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{2,1}$ .

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,2}$  è  $(\frac{1}{4}, 0, 0, 1)$ , quindi  $v_S(P_{2,2}) = 19 < 30$ , pertanto chiudiamo anche il nodo  $P_{2,2}$ .

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,3}$  è  $(0, 1, 1, 0)$ , quindi  $v_S(P_{2,3}) = 32$ . Ma tale soluzione è anche ammissibile e ha un valore maggiore della soluzione ammissibile  $(1, 0, 1, 0)$  trovata con l'algoritmo greedy, quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 32$  e chiudiamo il nodo  $P_{2,3}$ .

Con i vincoli  $x_2 = 1$  e  $x_1 = 1$  il problema  $P_{2,4}$  non ha soluzioni ammissibili, quindi possiamo chiudere il nodo  $P_{2,4}$  senza dover risolvere il suo rilassamento continuo.



la sol. ottima del rilassamento

è  $(0, 1, 1, 0)$ . Aggiorno  $v_I(P) = 32$

In conclusione la soluzione ottima del problema di caricamento è  $(0, 1, 1, 0)$  con valore uguale a 32.  $\square$

## Problemi a variabili intere

Anche per i problemi di caricamento a variabili intere utilizziamo il rilassamento continuo per trovare una valutazione superiore del valore ottimo:

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ & \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (13.3)$$

La soluzione ottima di tale problema si calcola facilmente sfruttando la dualità lineare; infatti il duale di (13.3) è:

$$\begin{cases} \min & y b \\ & y \geq \frac{c_1}{a_1} \\ & \vdots \\ & y \geq \frac{c_n}{a_n} \end{cases}$$

la cui soluzione ottima di è  $y = \frac{c_1}{a_1}$  con valore ottimo  $\frac{b c_1}{a_1}$ . Pertanto, la soluzione ottima di (13.3) è:

$$x = \left( \frac{b}{a_1}, 0, \dots, 0 \right),$$

ossia si satura il contenitore solo con l'oggetto di massimo rendimento e otteniamo come valutazione superiore  $v_S(P) = \left\lfloor \frac{b c_1}{a_1} \right\rfloor$ .

Per trovare una valutazione inferiore del valore ottimo applichiamo un algoritmo greedy simile a quello usato per i problemi a variabili binarie: seguendo l'ordine decrescente dei rendimenti, inseriamo gli oggetti nel contenitore nella massima quantità possibile controllando che venga rispettato il vincolo di capacità. Come nel caso precedente tale algoritmo fornisce una soluzione ammissibile, ma non necessariamente una soluzione ottima.

**Algoritmo greedy per problemi di caricamento a variabili intere**

```

for  $k = 1, \dots, n$  do
  if  $a_k \leq b$ 
    then  $x_k := \lfloor \frac{b}{a_k} \rfloor$ ,  $b := b - a_k x_k$ 
  else  $x_k := 0$ 
```

Consideriamo ora l'applicazione del metodo del *Branch and Bound*. In questo caso, non è applicabile la partizione dell'insieme delle soluzioni ammissibili, che vede  $x_i = 0$  su un ramo e  $x_i = 1$  sull'altro. Si possono invece applicare o una partizione ennaria o una binaria. Quella ennaria tiene conto dell'insieme dei valori interi che ogni variabile può assumere e su ogni ramo fissa  $x_i$  a uno di questi valori. In quella binaria invece si calcola una soluzione ottima  $\bar{x}$  di un rilassamento e si considera la variabile  $\bar{x}_i$  che assume un valore frazionario. L'obiettivo della partizione è impedire che la variabile  $x_i$  assuma nuovamente il valore frazionario  $\bar{x}_i$  nei due sottoproblemi figli. A tal fine, su un ramo si impone il vincolo  $x_i \leq \lfloor \bar{x}_i \rfloor$ , sull'altro si impone  $x_i \geq \lceil \bar{x}_i \rceil$ .

**Esempio 13.1.3.** Consideriamo il seguente problema di caricamento:

$$\begin{cases} \max & 4x_1 + 20x_2 + 27x_3 + 26x_4 \\ & 4x_1 + 19x_2 + 16x_3 + 14x_4 \leq 32 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i = 1, \dots, 4. \end{cases} \quad (P)$$

Dal vincolo sulla capacità dello zaino, possiamo ricavare le seguenti disuguaglianze valide:

$$4x_1 \leq 32, \quad 19x_2 \leq 32, \quad 16x_3 \leq 32, \quad 14x_4 \leq 32,$$

perciò:

$$x_1 \leq 8, \quad x_2 \leq \left\lfloor \frac{32}{19} \right\rfloor = 1, \quad x_3 \leq 2, \quad x_4 \leq \left\lfloor \frac{32}{14} \right\rfloor = 2,$$

quindi possiamo sostituire i vincoli  $x_i \in \mathbb{Z}_+$  con i seguenti vincoli che forniscono i valori interi che possono assumere le variabili  $x_i$ :

$$x_1 \in \{0, \dots, 8\}, \quad x_2 \in \{0, 1\}, \quad x_3 \in \{0, 1, 2\}, \quad x_4 \in \{0, 1, 2\}.$$

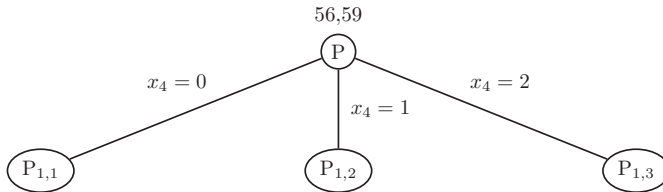
Osserviamo che le variabili hanno rendimenti crescenti:

$$\frac{4}{4} < \frac{20}{19} < \frac{27}{16} < \frac{26}{14}.$$

L'algoritmo *greedy* fornisce la soluzione ammissibile  $(1, 0, 0, 2)$  con  $v_I(P) = 56$ .

La soluzione ottima del rilassamento continuo di (P) è  $(0, 0, 0, \frac{16}{7})$ , quindi  $v_S(P) = 59$ .

Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo di (P) ha la quarta componente frazionaria, istanziamo la variabile  $x_4$  per iniziare l'esplorazione dell'albero:



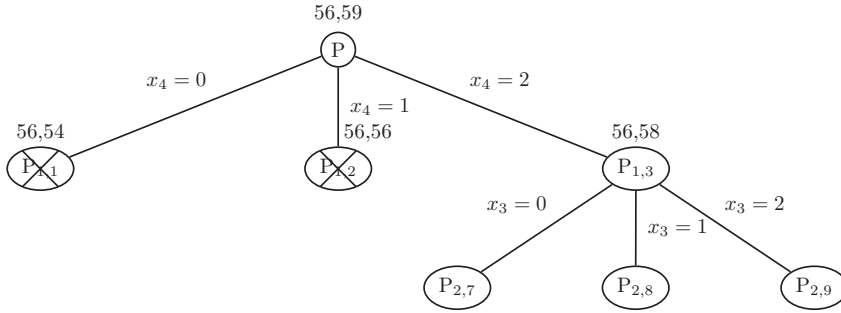
### 13.1 RISOLUZIONE CON IL *Branch and Bound*

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{1,1}$  è  $(0, 0, 2, 0)$ , quindi  $v_S(P_{1,1}) = 54 < 56$  e chiudiamo il nodo  $P_{1,1}$ .

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{1,2}$  è  $(0, 0, \frac{9}{8}, 1)$ , quindi  $v_S(P_{1,2}) = 56$  e chiudiamo anche il nodo  $P_{1,2}$ .

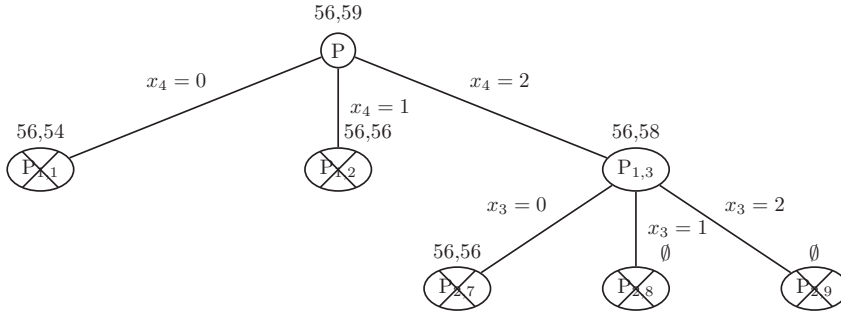
La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{1,3}$  è  $(0, 0, \frac{1}{4}, 2)$ , quindi  $v_S(P_{1,3}) = 58 > 56$ , pertanto il nodo  $P_{1,3}$  rimane aperto.

Dal nodo  $P_{1,3}$  istanziamo la variabile  $x_3$ :



L'ottimo del rilassamento di  $P_{2,7}$  è  $(0, \frac{4}{19}, 0, 2)$ , per cui  $v_S(P_{2,7}) = 56$  e chiudiamo il nodo  $P_{2,7}$ .

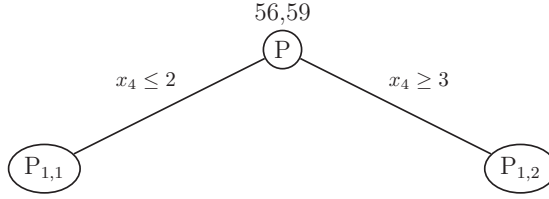
Con i vincoli  $x_4 = 2$  e  $x_3 = 1$  non esistono soluzioni ammissibili, quindi possiamo chiudere il nodo  $P_{2,8}$  e per lo stesso motivo chiudiamo anche il nodo  $P_{2,9}$ .



Concludiamo quindi che la soluzione ottima è  $(1, 0, 0, 2)$  con valore 56.  $\square$

**Esempio 13.1.4.** Risolviamo ora il problema dell'esempio precedente utilizzando un albero di enumerazione totale binario. Sappiamo che una soluzione ammissibile è  $(1, 0, 0, 2)$  con  $v_I(P) = 56$  e che la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(0, 0, 0, \frac{16}{7})$  con  $v_S(P) = 59$ . Istanziamo la variabile  $x_4$  per iniziare l'esplorazione dell'albero:

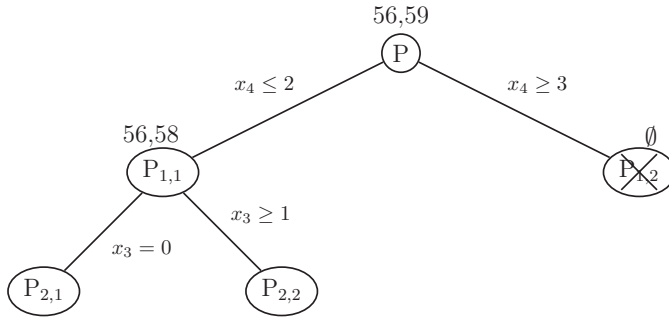
### 13. CARICAMENTO



La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{1,1}$  è  $(0, 0, \frac{1}{4}, 2)$ , quindi  $v_S(P_{1,1}) = 58$ , pertanto il nodo  $P_{1,1}$  rimane aperto.

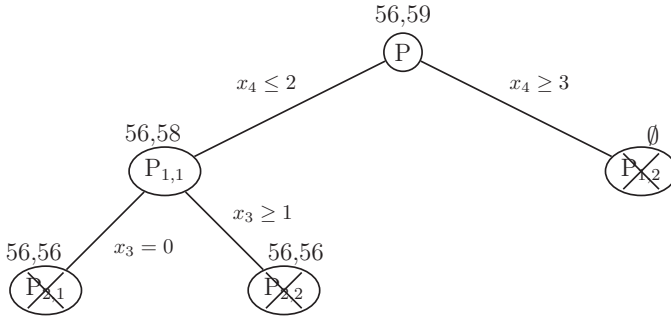
Possiamo chiudere il nodo  $P_{1,2}$  perché con il vincolo  $x_4 \geq 3$  non esistono soluzioni ammissibili.

Dal nodo  $P_{1,1}$  istanziamo la variabile  $x_3$ :



La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,1}$  è  $(0, \frac{4}{19}, 0, 2)$ , quindi  $v_S(P_{2,1}) = 56$  e chiudiamo il nodo  $P_{2,1}$ .

La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{2,2}$  è  $(0, 0, 1, \frac{16}{14})$ , quindi  $v_S(P_{2,2}) = 56$  e chiudiamo anche il nodo  $P_{2,2}$ .



Pertanto ritroviamo che la soluzione ottima è  $(1, 0, 0, 2)$  di valore 56. □

## 13.2 Risoluzione con la programmazione dinamica

La programmazione dinamica è un principio generale, applicabile a molti problemi di ottimizzazione (lineare o non lineare, con variabili continue o discrete) purché abbiano particolari proprietà di decomponibilità. La programmazione dinamica costruisce la soluzione ottima di un problema a partire da soluzioni ottime parziali. L'idea generale è di immergere il problema dato in una famiglia di problemi dello stesso tipo, collegare mediante un'equazione di ricorrenza i valori ottimi dei problemi di tale famiglia e risolvere tale equazione per trovare il valore ottimo del problema dato. Anziché svolgere una trattazione generale del metodo, lo applicheremo ai problemi di caricamento.

Consideriamo un problema di caricamento a variabili binarie:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{P})$$

dove  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{N}$  e  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Il problema (P) appartiene alla seguente famiglia di problemi di caricamento:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^j c_i x_i = v(E, j) \\ \sum_{i=1}^j a_i x_i \leq E \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, j \end{cases} \quad (\text{P}_{E,j})$$

dove il parametro  $E = 0, \dots, b$  rappresenta la capacità del contenitore ed il parametro  $j = 1, \dots, n$  il numero delle variabili. Il problema originario appartiene a tale famiglia di problemi, infatti  $(\text{P}) = (\text{P}_{b,n})$ .

La relazione di ricorrenza fondamentale lega il valore ottimo di un problema con  $j$  variabili con quello dei problemi con  $j - 1$  variabili. Consideriamo due casi in base al valore della capacità  $E$ :

- a) se  $E$  è minore del volume  $a_j$ , allora il  $j$ -esimo oggetto non può essere caricato, cioè deve valere  $x_j = 0$  e quindi il valore ottimo del problema  $(\text{P}_{E,j})$  è uguale al valore ottimo del problema con la stessa capacità  $E$  ma con  $j - 1$  variabili, cioè  $v(E, j - 1)$ .
- b) Se  $E$  è maggiore o uguale al volume  $a_j$ , allora il  $j$ -esimo oggetto può essere caricato nel contenitore e quindi per risolvere il problema  $(\text{P}_{E,j})$  dobbiamo stabilire se conviene caricarlo oppure no. Se viene caricato, cioè  $x_j = 1$ , allora il valore massimo degli oggetti inseriti nel contenitore è uguale al valore  $c_j$  dell'oggetto caricato più il valore ottimo del problema con capacità residua  $E - a_j$  e  $j - 1$  variabili, cioè  $v(E - a_j, j - 1)$ . Se non viene caricato, cioè  $x_j = 0$ , allora il valore massimo degli oggetti inseriti è uguale al valore ottimo del problema con la stessa capacità  $E$  ma con  $j - 1$  variabili.

### 13. CARICAMENTO

Pertanto il valore ottimo di  $(P_{E,j})$  è uguale al massimo tra  $c_j + v(E - a_j, j - 1)$  e  $v(E, j - 1)$ .

La relazione di ricorrenza è quindi la seguente:

$$v(E, j) = \begin{cases} v(E, j - 1) & \text{se } E < a_j \\ \max\{c_j + v(E - a_j, j - 1), v(E, j - 1)\} & \text{se } E \geq a_j \end{cases} \quad (13.4)$$

Per calcolare il valore ottimo di (P) prima risolviamo i problemi con una sola variabile per ogni valore di  $E = 0, \dots, b$ , poi, usando la relazione di ricorrenza, risolviamo quelli con due variabili, e così via fino a risolvere il problema (P) con  $n$  variabili. Utilizziamo anche una matrice  $u(E, j)$  in cui memorizziamo anche il valore di  $x_j$  nella soluzione ottima di ogni problema  $(P_{E,j})$ . Tali valori saranno utili per ricostruire “a ritroso” la soluzione ottima di (P).

#### Algoritmo di programmazione dinamica per problemi di caricamento a variabili binarie

1. **for**  $E = 0, \dots, b$  **do**  
     **if**  $E < a_1$   
         **then**  $u(E, 1) := 0, v(E, 1) := 0,$   
         **else**  $u(E, 1) := 1, v(E, 1) := c_1.$
2. **for**  $j = 2, \dots, n - 1$  **do**  
     **for**  $E = 0, \dots, b$  **do**  
         **if**  $E < a_j$  oppure  $c_j + v(E - a_j, j - 1) \leq v(E, j - 1)$   
             **then**  $u(E, j) := 0, v(E, j) := v(E, j - 1),$   
             **else**  $u(E, j) := 1, v(E, j) := c_j + v(E - a_j, j - 1),$
3. **if**  $c_n + v(b - a_n, n - 1) \leq v(b, n - 1)$   
     **then**  $u(b, n) := 0, v(b, n) := v(b, n - 1),$   
     **else**  $u(b, n) := 1, v(b, n) := c_n + v(b - a_n, n - 1)$
4. (Valore ottimo)  $v(P) := v(b, n)$
5. (Soluzione ottima)  
     **for**  $i = n, \dots, 1$  **do**  
          $x_i := u(b, i), b := b - a_i x_i$



**Esempio 13.2.1.** Consideriamo il seguente problema di caricamento:

$$\begin{cases} \max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{cases} \quad (\text{P})$$

Applicando il passo 1 dell'algoritmo troviamo i valori della prima colonna delle matrici  $u$  e  $v$ :

|      |                 |   |   |   |   |
|------|-----------------|---|---|---|---|
| $u=$ | $E \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|      | 0               | 0 |   |   |   |
|      | 1               | 0 |   |   |   |
|      | 2               | 0 |   |   |   |
|      | 3               | 0 |   |   |   |
|      | 4               | 1 |   |   |   |
|      | 5               | 1 |   |   |   |

|      |                 |   |   |   |   |
|------|-----------------|---|---|---|---|
| $v=$ | $E \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|      | 0               | 0 |   |   |   |
|      | 1               | 0 |   |   |   |
|      | 2               | 0 |   |   |   |
|      | 3               | 0 |   |   |   |
|      | 4               | 6 |   |   |   |
|      | 5               | 6 |   |   |   |

Applicando i passi 2 e 3 troviamo gli altri valori di  $u$  e  $v$ :

|      |                 |   |   |   |   |
|------|-----------------|---|---|---|---|
| $u=$ | $E \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|      | 0               | 0 | 0 | 0 |   |
|      | 1               | 0 | 0 | 0 |   |
|      | 2               | 0 | 0 | 1 |   |
|      | 3               | 0 | 1 | 0 |   |
|      | 4               | 1 | 0 | 0 |   |
|      | 5               | 1 | 0 | 1 | 0 |

|      |                 |   |   |   |   |
|------|-----------------|---|---|---|---|
| $v=$ | $E \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|      | 0               | 0 | 0 | 0 |   |
|      | 1               | 0 | 0 | 0 |   |
|      | 2               | 0 | 0 | 4 |   |
|      | 3               | 0 | 5 | 5 |   |
|      | 4               | 6 | 6 | 6 |   |
|      | 5               | 6 | 6 | 9 | 9 |

Quindi il valore ottimo del problema è  $v(5, 4) = 9$ , mentre la soluzione ottima è

$$x_4 = u(5, 4) = 0, \quad x_3 = u(5, 3) = 1, \quad x_2 = u(3, 2) = 1, \quad x_1 = u(0, 1) = 0.$$

□

L'algoritmo precedente può essere esteso facilmente a problemi di caricamento a variabili intere. In questo caso per un generico problema  $(P_{E,j})$  la variabile  $x_j$  può assumere i valori  $0, 1, \dots, \lfloor \frac{E}{a_j} \rfloor$ . Quindi la relazione di ricorrenza (13.4) viene modificata come segue:

$$v(E, j) = \begin{cases} v(E, j-1) & \text{se } 0 \leq E < a_j \\ \max\{v(E, j-1), c_j + v(E - a_j, j-1)\} & \text{se } a_j \leq E < 2a_j \\ \dots & \dots \\ \max\{v(E, j-1), \\ c_j + v(E - a_j, j-1), \\ 2c_j + v(E - 2a_j, j-1), \\ \dots, \\ \lfloor \frac{E}{a_j} \rfloor c_j + v(E - \lfloor \frac{E}{a_j} \rfloor a_j, j-1)\} & \text{se } \lfloor \frac{b}{a_j} \rfloor a_j \leq E \leq b \end{cases} \quad (13.5)$$

### 13. CARICAMENTO

Al primo passo dell'algoritmo si calcolano i valori della prima colonna di  $u$  e  $v$ : per ogni  $E = 0, \dots, b$  si ha

$$u(E, 1) = \left\lfloor \frac{E}{a_1} \right\rfloor, \quad v(E, 1) = \left\lfloor \frac{E}{a_1} \right\rfloor c_1.$$

Usando la relazione di ricorrenza (13.5) si calcolano i valori di  $u(E, j)$  e  $v(E, j)$  per ogni  $E = 0, \dots, b$  e per ogni  $j = 2, \dots, n - 1$ . Infine si calcolano  $u(b, n)$ ,  $v(b, n)$  e si trova la soluzione ottima del problema.

**Esempio 13.2.2.** Consideriamo il seguente problema di caricamento:

$$\begin{cases} \max & 7x_1 + 10x_2 + 12x_3 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 11 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Applicando l'algoritmo descritto sopra troviamo i valori di  $u$  e  $v$ :

|       |                 |   |   |   |
|-------|-----------------|---|---|---|
| $u =$ | $E \setminus j$ | 1 | 2 | 3 |
|       | 0               | 0 | 0 |   |
|       | 1               | 0 | 0 |   |
|       | 2               | 0 | 0 |   |
|       | 3               | 1 | 0 |   |
|       | 4               | 1 | 1 |   |
|       | 5               | 1 | 1 |   |
|       | 6               | 2 | 0 |   |
|       | 7               | 2 | 1 |   |
|       | 8               | 2 | 2 |   |
|       | 9               | 3 | 0 |   |
|       | 10              | 3 | 1 |   |
|       | 11              | 3 | 2 | 0 |

|       |                 |    |    |    |
|-------|-----------------|----|----|----|
| $v =$ | $E \setminus j$ | 1  | 2  | 3  |
|       | 0               | 0  | 0  |    |
|       | 1               | 0  | 0  |    |
|       | 2               | 0  | 0  |    |
|       | 3               | 7  | 7  |    |
|       | 4               | 7  | 10 |    |
|       | 5               | 7  | 10 |    |
|       | 6               | 14 | 14 |    |
|       | 7               | 14 | 17 |    |
|       | 8               | 14 | 20 |    |
|       | 9               | 21 | 21 |    |
|       | 10              | 21 | 24 |    |
|       | 11              | 21 | 27 | 27 |

Il valore ottimo del problema quindi 27 e la soluzione ottima è:

$$x_3 = u(11, 3) = 0, \quad x_2 = u(11, 2) = 2, \quad x_1 = u(3, 1) = 1.$$

□

# Capitolo 14

## Commesso viaggiatore

Consideriamo un grafo orientato completo  $G = (N, A)$  in cui sia definito un costo  $c_{ij}$  per ogni arco  $(i, j) \in A$ . Un ciclo orientato che passa per tutti i nodi del grafo una ed una sola volta è detto *ciclo hamiltoniano* e il suo costo è definito come la somma dei costi degli archi da cui è formato. Il problema di trovare un ciclo hamiltoniano di costo minimo viene chiamato problema del commesso viaggiatore o in breve TSP (Travelling Salesman Problem), perché un esempio tipico di tale situazione si può trovare nel problema che ha un commesso viaggiatore che deve visitare un numero fissato di città (oppure uffici, edifici) una ed una sola volta per mostrare il proprio prodotto.

Se per ogni arco  $(i, j) \in A$  si ha  $c_{ij} = c_{ji}$ , allora il problema è detto *simmetrico*, altrimenti viene detto *asimmetrico*. I problemi simmetrici potrebbero essere risolti mediante le tecniche sviluppate per i più generali problemi asimmetrici, tuttavia, come vedremo in seguito, tale approccio risulta inefficiente, pertanto tratteremo i due casi separatamente.

### 14.1 Problema asimmetrico

Rappresentiamo un ciclo hamiltoniano  $\mathcal{C}$  mediante le variabili binarie  $x_{ij}$ , dove

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Una possibile formulazione del TSP asimmetrico è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i \in N, i \neq j} x_{ij} = 1 & \forall j \in N \\ \sum_{j \in N, j \neq i} x_{ij} = 1 & \forall i \in N \\ \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset N, S \neq \emptyset \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in A. \end{array} \right.$$

Il primo insieme di vincoli stabilisce che il ciclo hamiltoniano debba avere un solo arco entrante in ogni nodo  $j \in N$ ; in modo analogo, il secondo insieme di vincoli impone che il ciclo hamiltoniano abbia un solo arco uscente da ogni nodo  $i \in N$ . Il terzo insieme di vincoli (detti vincoli di connessione) stabilisce che il ciclo hamiltoniano abbia almeno un arco uscente da ogni sottoinsieme non vuoto  $S$  di nodi, in modo da evitare la formazione di cicli orientati che non passano per tutti i nodi. Osserviamo che, nel terzo insieme di vincoli, il vincolo corrispondente al caso  $|S| = 1$  è ridondante, essendo già presente nel secondo insieme di vincoli.

Nella risoluzione del TSP asimmetrico mediante il metodo del Branch and Bound, è importante avere a disposizione “buone” valutazioni inferiori del valore ottimo. A tale scopo, eliminando dal problema il terzo insieme di vincoli, si ottiene un problema rilassato, che equivale al seguente problema di assegnamento di costo minimo:

$$\begin{cases} \min \sum_{i,j \in N} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i \in N} x_{ij} = 1 & \forall j \in N, \\ \sum_{j \in N} x_{ij} = 1 & \forall i \in N, \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in N, \end{cases} \quad (14.1)$$

in cui si pone  $c_{ii} = +\infty$  per ogni nodo  $i \in N$ , per evitare che nella soluzione ottima  $x^*$  ci sia  $x_{ii}^* = 1$  per qualche  $i$ . Tale problema di assegnamento è un particolare problema di flusso di costo minimo che può essere risolto mediante l'algoritmo del simplesso per flussi (vedi paragrafo 6.4). In generale, la soluzione ottima di tale problema di assegnamento è costituita da una famiglia di cicli orientati che coprono tutti i nodi dal grafo.

Nei casi in cui la matrice dei costi sia fortemente asimmetrica, il valore ottimo del problema di assegnamento ( $v_{ASS}$ ) è una stima per difetto piuttosto buona del valore ottimo del TSP ( $v_{TSP}$ ), nel senso che il rapporto

$$\frac{v_{TSP} - v_{ASS}}{v_{TSP}}$$

è dell'ordine di poche frazioni di punto percentuale. Al contrario, nel caso di una matrice dei costi simmetrica, lo stesso rapporto si aggira intorno al 60% e all'assegnamento ottimo corrisponde un gran numero di cicli orientati.

Illustriamo ora un metodo euristico per trovare una soluzione ammissibile per il TSP asimmetrico che ha uno scostamento, in termini di funzione obiettivo, di pochi punti percentuali dalla soluzione ottima. Il metodo viene detto *algoritmo delle toppe* perché genera un ciclo hamiltoniano attraverso successive fusioni dei cicli disgiunti che costituiscono la soluzione ottima del rilassamento (14.1).

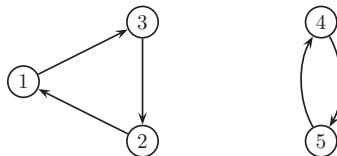
Algoritmo delle toppe

1. Sia  $C = \{C_1, \dots, C_p\}$  l'insieme dei cicli orientati corrispondenti alla soluzione ottima del problema (14.1).
2. Per ogni coppia di cicli  $C_h, C_k \in C$ , valuta l'incremento di costo  $\gamma_{hk}$  corrispondente alla fusione di  $C_h$  e  $C_k$  nel modo più conveniente possibile.
3. Effettua la fusione dei due cicli  $C_h$  e  $C_k$  ai quali corrisponde il minimo valore di  $\gamma_{hk}$ . Aggiorna  $C$  e poni  $p = p - 1$ .
4. **if**  $p = 1$  **then** STOP ( $C$  è un ciclo hamiltoniano),  
**else** torna al passo 2.

**Esempio 14.1.1.** Risolviamo con il metodo del Branch and Bound il TSP asimmetrico su un grafo orientato completo con 5 nodi, la cui matrice dei costi  $c_{ij}$  è:

|   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|----|----|----|----|----|
| 1 | 0  | 33 | 13 | 25 | 33 |
| 2 | 33 | 0  | 46 | 58 | 76 |
| 3 | 39 | 33 | 0  | 12 | 30 |
| 4 | 35 | 29 | 12 | 0  | 23 |
| 5 | 60 | 54 | 30 | 23 | 0  |

Per prima cosa troviamo una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento (14.1). La soluzione ottima è formata dai due cicli disgiunti descritti in figura:



Il valore di tale soluzione ci dà  $v_I(P) = 125$ .

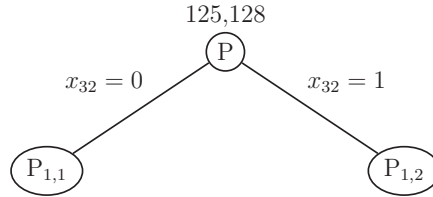
Per ottenere una valutazione superiore troviamo un ciclo hamiltoniano applicando l'algoritmo delle toppe. Poiché la soluzione ottima del problema di assegnamento contiene due cicli disgiunti, dobbiamo decidere quale sia la fusione più conveniente di tali cicli, in modo che sia minimo il costo del ciclo hamiltoniano risultante dalla loro fusione. Le possibili fusioni dei due cicli sono le seguenti:

- sostituire gli archi  $(1, 3)$  e  $(4, 5)$  con gli archi  $(1, 5)$  e  $(4, 3)$ , ottenendo il ciclo hamiltoniano 1-5-4-3-2 di costo 134;

- sostituire gli archi  $(1, 3)$  e  $(5, 4)$  con gli archi  $(1, 4)$  e  $(5, 3)$ , ottenendo il ciclo hamiltoniano 1-4-5-3-2 di costo 144;
- sostituire gli archi  $(2, 1)$  e  $(4, 5)$  con gli archi  $(2, 5)$  e  $(4, 1)$ , ottenendo il ciclo hamiltoniano 1-3-2-5-4 di costo 180;
- sostituire gli archi  $(2, 1)$  e  $(5, 4)$  con gli archi  $(2, 4)$  e  $(5, 1)$ , ottenendo il ciclo hamiltoniano 1-3-2-4-5 di costo 187;
- sostituire gli archi  $(3, 2)$  e  $(4, 5)$  con gli archi  $(3, 5)$  e  $(4, 2)$ , ottenendo il ciclo hamiltoniano 1-3-5-4-2 di costo 128;
- sostituire gli archi  $(3, 2)$  e  $(5, 4)$  con gli archi  $(3, 4)$  e  $(5, 2)$ , ottenendo il ciclo hamiltoniano 1-3-4-5-2 di costo 135.

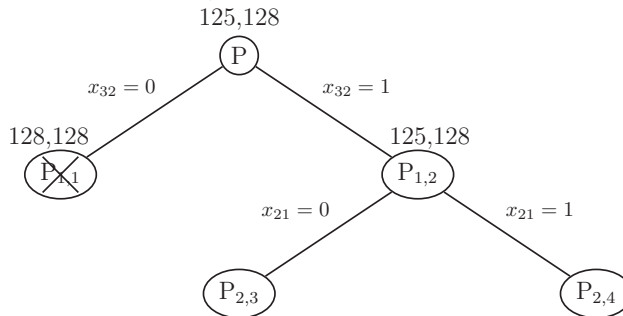
Ricaviamo perciò che la fusione più conveniente è quella con cui si ottiene il ciclo hamiltoniano 1-3-5-4-2, quindi  $v_S(P) = 128$ .

Iniziamo ora l'esplorazione dell'albero di enumerazione totale, fissando la variabile  $x_{32}$ . Su ogni nodo  $P_{i,j}$  dell'albero di enumerazione totale indichiamo i valori  $v_I(P_{i,j})$  e  $v_S(P)$ .



Per ottenere una valutazione inferiore del valore ottimo di  $P_{1,1}$  risolviamo il problema (14.1) con il vincolo aggiuntivo  $x_{32} = 0$ . Il valore ottimo di tale problema è 128, ossia abbiamo  $v_I(P_{1,1}) = 128 = v_S(P)$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{1,1}$ .

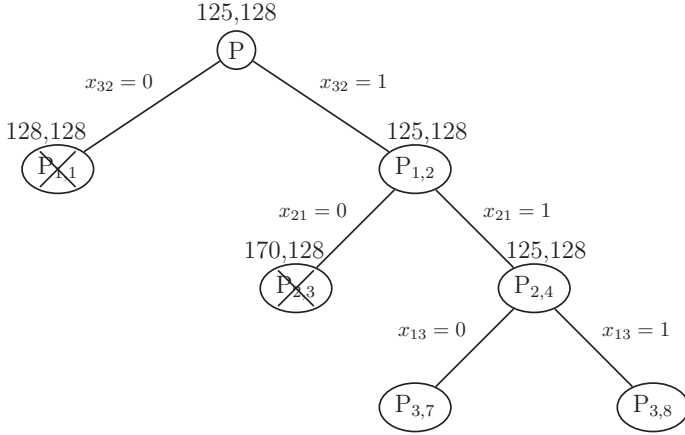
Osserviamo che la soluzione ottima del rilassamento di (P) contiene l'arco  $(3, 2)$ , quindi essa risolve anche il rilassamento di  $(P_{1,2})$ . Otteniamo così  $v_I(P_{1,2}) = 125 < 128 = v_S(P)$  e quindi rimane aperto il nodo  $P_{1,2}$ . Fissiamo ora la variabile  $x_{21}$ :



#### 14.1 PROBLEMA ASIMMETRICO

Risolvendo il rilassamento di  $P_{2,3}$  otteniamo  $v_I(P_{2,3}) = 170 > 128 = v_S(P)$ , quindi chiudiamo il nodo  $P_{2,3}$ .

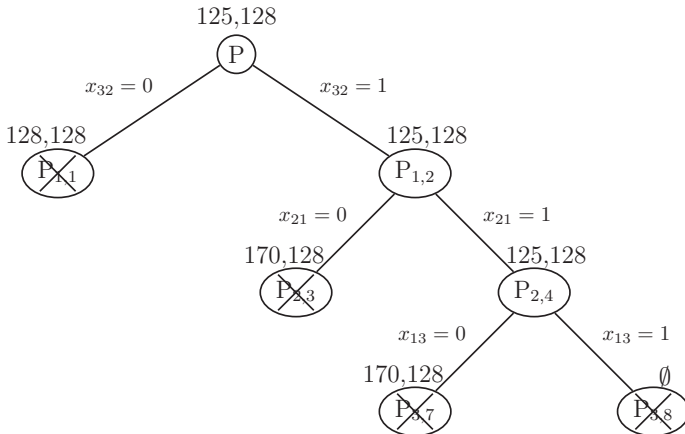
Poiché la soluzione ottima del rilassamento di  $(P)$  contiene sia l'arco  $(3, 2)$  che l'arco  $(2, 1)$ , essa è ottima anche per il rilassamento di  $P_{2,4}$  e quindi  $v_I(P_{2,4}) = 125 < 128$ , quindi non possiamo chiudere il nodo  $P_{2,4}$ . Fissiamo ora la variabile  $x_{13}$ :



Risolvendo il rilassamento di  $P_{3,7}$  otteniamo  $v_I(P_{3,7}) = 170 > 128 = v_S(P)$  e quindi chiudiamo il nodo  $P_{3,7}$ . Ma possiamo chiudere anche il nodo  $P_{3,8}$  perché non contiene soluzioni ammissibili. Infatti i vincoli

$$x_{32} = 1 \quad x_{21} = 1 \quad x_{13} = 1$$

formano un ciclo sui nodi 3-2-1 e quindi non può esistere un ciclo hamiltoniano che contenga un tale ciclo.



Avendo chiuso tutti i nodi dell'albero possiamo concludere che il ciclo hamiltoniano 1-3-5-4-2 di costo 128 è la soluzione ottima del TSP.  $\square$

## 14.2 Problema simmetrico

Il TSP simmetrico potrebbe essere trattato come un caso particolare del TSP asimmetrico, tuttavia è preferibile formularlo in una maniera più efficiente. Essendo simmetrica la matrice dei costi, possiamo supporre che gli archi non siano orientati e che l'arco che collega due nodi  $i$  e  $j$ , con  $i < j$ , sia indicato con  $(i, j)$ . Per individuare un ciclo hamiltoniano  $\mathcal{C}$  usiamo come prima le variabili binarie  $x_{ij}$ :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La formulazione del TSP simmetrico è la seguente:

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(h,i) \in A} x_{hi} + \sum_{(i,k) \in A} x_{ik} = 2 & \forall i \in N \\ \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \in S, j \notin S}} x_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \notin S, j \in S}} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset N, \quad 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{|N|}{2} \rceil, \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in A. \end{cases}$$

Il primo insieme di vincoli stabilisce che il *grado* di ogni nodo sia uguale a 2, cioè che esistano esattamente 2 archi incidenti su ciascun nodo. Il secondo insieme di vincoli esprime il vincolo di connessione, ossia impone che, comunque si scelga un sottoinsieme  $S$  di nodi, esista almeno un arco avente un estremo in  $S$  e l'altro fuori da  $S$ . Poiché il vincolo relativo ad un sottoinsieme  $S$  equivale al vincolo relativo al suo complementare  $N \setminus S$ , è sufficiente considerare solo i sottoinsiemi di cardinalità minore o uguale alla metà di  $|N|$  (approssimata per eccesso all'intero più vicino, se è dispari).

Descriviamo ora un metodo euristico per trovare un ciclo hamiltoniano: *l'algoritmo del nodo più vicino*, che ci fornirà quindi una valutazione superiore del problema del TSP simmetrico. Tale algoritmo parte da un nodo  $s_1$  e lo collega al nodo più vicino  $s_2$  secondo le distanze  $c_{ij}$ , poi collega quest'ultimo al nodo più vicino  $s_3$  escludendo quelli già raggiunti, e così via fino a collegare tutti i nodi. Il ciclo hamiltoniano è individuato dalla sequenza di nodi  $s_1, s_2, \dots, s_n$ .



**Algoritmo del nodo più vicino**

Scegli un nodo  $i \in N$ , poni  $s_1 := i$ ,  $N := N \setminus \{i\}$ ,  $k := 1$ .  
**while**  $N \neq \emptyset$  **do**  
     Trova un nodo  $j \in N$  con la minima distanza dal nodo  $s_k$   
     poni  $s_{k+1} := j$ ,  $N := N \setminus \{j\}$  e  $k := k + 1$ .

Un rilassamento del TSP simmetrico che fornisce buone valutazioni inferiori si ottiene eliminando tutti i vincoli sul grado dei nodi tranne uno che supporremo essere il nodo  $r$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum_{(h,r) \in A} x_{hr} + \sum_{(r,k) \in A} x_{rk} = 2 & \\ \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \in S, j \notin S}} x_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \notin S, j \in S}} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset N \setminus \{r\}, \quad 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{|N|}{2} \rceil \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in A. \end{array} \right.$$

Tale rilassamento corrisponde al problema dell' $r$ -albero di costo minimo: un  $r$ -albero è un insieme di  $n$  archi di cui:

- $n - 2$  archi formano un albero di copertura sul sottografo formato dai nodi  $N \setminus \{r\}$ ,
- 2 archi sono incidenti sul nodo  $r$ .

Per risolvere il problema dell' $r$ -albero di costo minimo è sufficiente scegliere 2 archi di minimo costo incidenti sul nodo  $r$  ed un albero di copertura di costo minimo sul sottografo formato dai nodi  $N \setminus \{r\}$ . Un albero di copertura  $T$  di costo minimo su un qualunque grafo  $(N, A)$  si può ottenere rapidamente con il seguente algoritmo *greedy*: si esaminano gli archi in ordine crescente di costo ed ogni arco viene inserito nell'albero  $T$  se non forma un ciclo con gli archi già presenti in  $T$ .

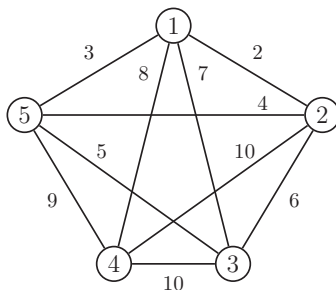
**Algoritmo di Kruskal**

Siano  $n = |N|$  e  $m = |A|$ . Ordina gli archi  $a_1, \dots, a_m$  di  $A$  in ordine crescente di costo. Poni  $T := \{a_1\}$  e  $k := 2$ .  
**while**  $|T| < n - 1$  **do**  
     **if**  $a_k$  non forma un ciclo con gli archi di  $T$  **then**  $T := T \cup \{a_k\}$   
      $k := k + 1$

Si può dimostrare che l'algoritmo di Kruskal è corretto.

**Esempio 14.2.1.** Applichiamo l'algoritmo di Kruskal per trovare l'albero di copertura costo minimo sul seguente grafo:

#### 14. COMMESSE VIAGGIATORE

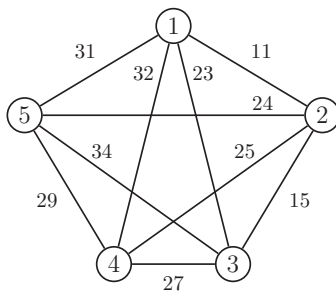


Disponiamo gli archi in ordine crescente di costo:

| archi | (1, 2) | (1, 5) | (2, 5) | (3, 5) | (2, 3) | (1, 3) | (1, 4) | (4, 5) | (2, 4) | (3, 4) |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| costi | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 10     |

Alla prima iterazione  $T = \{(1, 2)\}$ . L'arco  $(1, 5)$  non forma un ciclo con  $(1, 2)$  e quindi  $T = \{(1, 2), (1, 5)\}$ . L'arco  $(2, 5)$  forma un ciclo con gli archi di  $T$  e quindi non viene inserito. L'arco  $(3, 5)$  viene inserito in  $T$  e quindi  $T = \{(1, 2), (1, 5), (3, 5)\}$ . Gli archi  $(2, 3)$  e  $(1, 3)$  non vengono inseriti in  $T$  e infine  $(1, 4)$  viene inserito in  $T$ . L'albero di copertura ottimo è quindi  $T = \{(1, 2), (1, 5), (3, 5), (1, 4)\}$ .  $\square$

**Esempio 14.2.2.** Risolviamo il seguente problema di TSP con il metodo del Branch and Bound.

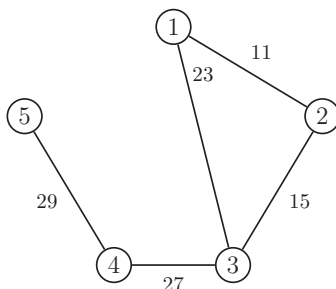


Per trovare una soluzione ammissibile applichiamo l'algoritmo del nodo più vicino partendo dal nodo 1. Il nodo più vicino al nodo 1 è il nodo 2. Tra i nodi 3, 4 e 5 il più vicino al nodo 2 è il nodo 3. Tra i nodi 4 e 5, il più vicino al nodo 3 è il nodo 4. Infine, colleghiamo il nodo 4 al nodo 5 rimasto ed il nodo 5 al nodo 1 di partenza. Otteniamo così il ciclo hamiltoniano 1-2-3-4-5 che ci fornisce  $v_S(P) = 113$ .

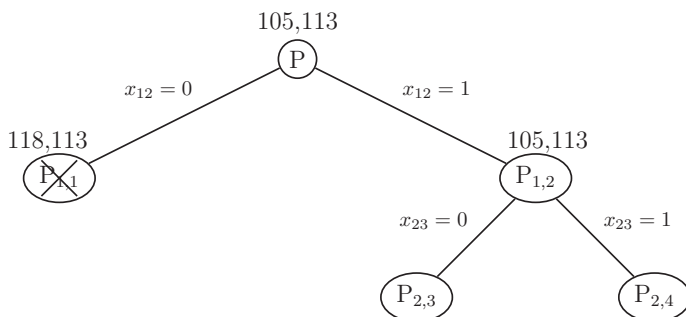
Per trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcoliamo il 2-albero di costo minimo. Applicando l'algoritmo di Kruskal troviamo che l'albero di copertura di costo minimo sui nodi 1, 3, 4, 5 è formato dagli archi  $(1, 3)$ ,  $(3, 4)$  e  $(4, 5)$ . I due archi di costo

## 14.2 PROBLEMA SIMMETRICO

minimo incidenti sul nodo 2 sono  $(1, 2)$  e  $(2, 3)$ . Quindi il 2-albero di costo minimo è il seguente:

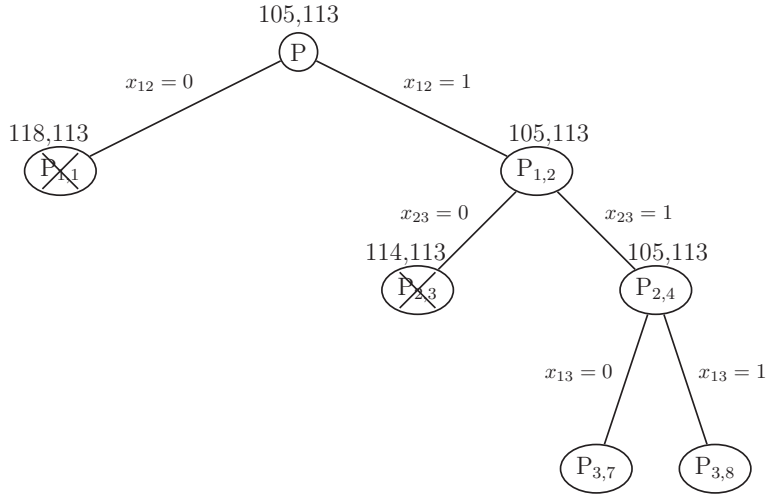


Quindi abbiamo  $v_I(P) = 105$ . Per iniziare il Branch and Bound scegliamo la variabile  $x_{12}$ . Un rilassamento di  $(P_{1,1})$  è il 2-albero di costo minimo nel grafo in cui è stato cancellato l'arco  $(1, 2)$ . La soluzione ottima di tale problema è ottenuta dal 2-albero di costo 105, sostituendo l'arco  $(1, 2)$  con l'arco  $(2, 5)$ . Otteniamo quindi  $v_I(P_{1,1}) = 118 > 113 = v_S(P)$  e quindi possiamo chiudere il nodo  $P_{1,1}$ . Per quanto riguarda il problema  $P_{1,2}$ , sappiamo già che  $v_I(P_{1,2}) = 105$  perché il 2-albero calcolato all'inizio contiene l'arco  $(1, 2)$ , perciò non possiamo chiudere il nodo  $P_{1,2}$  e dobbiamo continuare con l'esplorazione dell'albero. Fissiamo allora la variabile  $x_{23}$ :



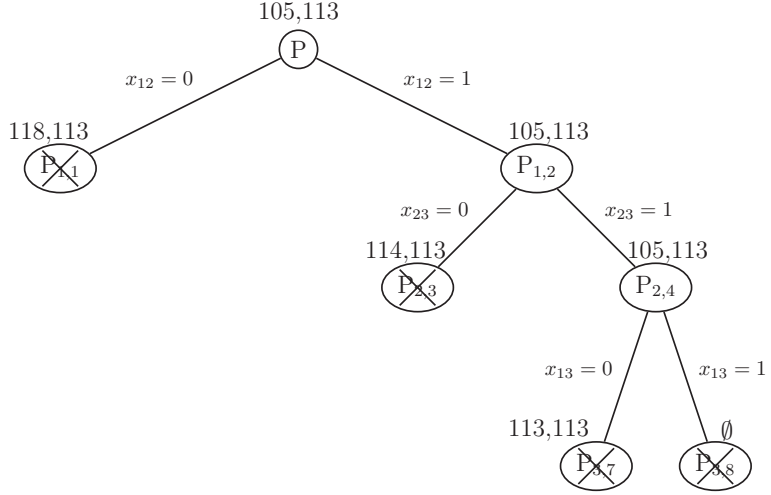
Risolviamo il rilassamento di  $(P_{2,3})$ : con i vincoli  $x_{12} = 1$  e  $x_{23} = 0$  l'albero di copertura di costo minimo sui nodi 1,3,4,5, è sempre formato dagli archi  $(1, 3)$ ,  $(3, 4)$  e  $(4, 5)$ ; i

due archi di costo minimo incidenti sul nodo 2 sono  $(1, 2)$  e  $(2, 5)$ , quindi otteniamo che  $v_I(P_{2,3}) = 114 > 113 = v_S(P)$  e chiudiamo il nodo  $P_{2,3}$ . Come prima, sappiamo subito che  $v_I(P_{2,4}) = 105$  perché il 2-albero calcolato all'inizio contiene sia l'arco  $(1, 2)$  che l'arco  $(2, 3)$ . Anche in questo caso non possiamo chiudere il nodo  $P_{2,4}$ . Fissiamo ora la variabile  $x_{13}$ :



La soluzione ottima del rilassamento di  $P_{3,7}$  è formata dagli archi  $(3, 4)$ ,  $(4, 5)$  e  $(1, 5)$  che formano un albero di copertura di costo minimo sui nodi  $1, 3, 4, 5$  e dagli archi  $(1, 2)$  e  $(2, 3)$ , quindi otteniamo il ciclo hamiltoniano  $1-2-3-4-5$  calcolato all'inizio con  $v_I(P_{3,7}) = 113 = v_S(P)$ , pertanto chiudiamo il nodo  $P_{3,7}$ . Possiamo chiudere anche il nodo  $P_{3,8}$  perché non contiene soluzioni ammissibili: infatti i vincoli  $x_{12} = 1$ ,  $x_{23} = 1$  e  $x_{13} = 1$  formano un ciclo sui nodi  $1, 2, 3$  e quindi non può esistere un ciclo hamiltoniano che contenga un tale ciclo.

## 14.2 PROBLEMA SIMMETRICO



Avendo chiuso tutti i nodi dell'albero di enumerazione totale concludiamo che il ciclo hamiltoniano di costo minimo è 1-2-3-4-5 di costo 113.  $\square$

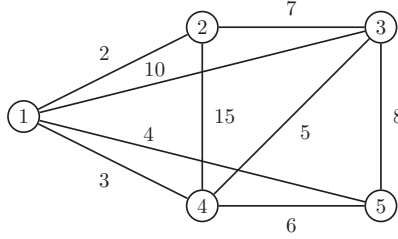
Consideriamo ora un altro tipo di rilassamento per il TSP simmetrico. Invece di eliminare i vincoli sul grado dei nodi diversi da un fissato nodo  $r$ , facciamo il rilassamento lagrangiano rispetto a tali vincoli: associamo ad ogni nodo  $i \neq r$  un moltiplicatore  $\mu_i \in \mathbb{R}$  ed al nodo  $r$  un moltiplicatore nullo  $\mu_r = 0$ . Il rilassamento lagrangiano può essere formulato così:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij} + \mu_i + \mu_j) x_{ij} - 2 \sum_{i \in N} \mu_i & \\ \mu_r = 0 & \\ \sum_{(h,r) \in A} x_{hr} + \sum_{(r,k) \in A} x_{rk} = 2 & \\ \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \in S, j \notin S}} x_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \notin S, j \in S}} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset N \setminus \{r\}, \quad 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{|N|}{2} \rceil \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in A, \end{array} \right. \quad (P_\mu)$$

la cui soluzione ottima è l' $r$ -albero di costo minimo sul grafo in cui i costi  $c_{ij}$  degli archi sono stati modificati in  $c_{ij} + \mu_i + \mu_j$ , in funzione dei moltiplicatori  $\mu_i$ . Indichiamo con  $w$  la funzione che a  $\mu$  associa il valore ottimo del problema  $(P_\mu)$ , cioè  $w(\mu) := v(P_\mu) = v_I(P)$ . Possiamo applicare i risultati visti nel paragrafo 12.2 per trovare la migliore di tali valutazioni inferiori. Essendo  $(P_\mu)$  un problema di minimo, la funzione  $w$  risulta concava (e

in generale non differenziabile) e si può definire il concetto di sopragradiente di  $w$  in modo simile a quello di sottogradiente di una funzione convessa. In modo analogo si definisce il metodo del sopragradiente per massimizzare la funzione  $w$ .

**Esempio 14.2.3.** Consideriamo il TSP simmetrico sul seguente grafo:



Facciamo un rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli sul grado dei nodi 2, 3, 4, e 5, scegliendo il vettore dei moltiplicatori  $\mu^0 = 0$ , ovvero eliminiamo gli stessi vincoli dalla formulazione del TSP. La soluzione ottima di tale rilassamento è l'1-albero di costo minimo è formato dagli archi

$$(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 5);$$

il valore della funzione  $w$  in  $\mu^0$  è uguale al costo di tale 1-albero, cioè  $w(\mu^0) = 23$ , che è anche una valutazione inferiore del valore ottimo del TSP. Cerchiamo ora di migliorare tale valutazione inferiore facendo un'iterazione del metodo del sopragradiente (vedi paragrafo 12.2) applicato alla funzione  $w$ . Un sopragradiente di  $w$  in  $\mu^0$  è dato dal vettore  $g^0 \in \mathbb{R}^5$  così definito:

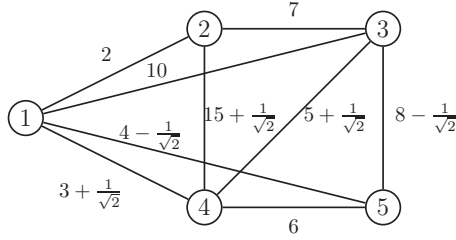
$$\begin{aligned} g_1^0 &= 0 \\ g_2^0 &= \sum_{(h,2) \in A} x_{h2}^* + \sum_{(2,k) \in A} x_{2k}^* - 2 = 0 \\ g_3^0 &= \sum_{(h,3) \in A} x_{h3}^* + \sum_{(3,k) \in A} x_{3k}^* - 2 = 0 \\ g_4^0 &= \sum_{(h,4) \in A} x_{h4}^* + \sum_{(4,k) \in A} x_{4k}^* - 2 = 1 \\ g_5^0 &= \sum_{(h,5) \in A} x_{h5}^* + \sum_{(5,k) \in A} x_{5k}^* - 2 = -1 \end{aligned}$$

ovvero, per ogni nodo  $i \neq 1$ , abbiamo che  $g_i^0$  è la differenza tra il grado del nodo  $i$  nell'1-albero di costo minimo e la costante 2. Il punto successivo a  $\mu^0$ , applicando il metodo del sopragradiente è:

$$\mu^1 = \mu^0 + \frac{g^0}{\|g^0\|} = \frac{(0, 0, 0, 1, -1)}{\sqrt{2}} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

La soluzione ottima del rilassamento lagrangiano, corrispondente a  $\mu^1$ , è l'1-albero di costo minimo sul seguente grafo:

## 14.2 PROBLEMA SIMMETRICO



Tale soluzione ottima è formata dagli archi

$$(1, 2), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5),$$

il suo costo è di 24. Il valore di  $w$  in  $\mu^1$  è

$$w(\mu^1) = 24 - 2 \sum_{i=1}^5 \mu_i^1 = 24 - 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 24,$$

pertanto abbiamo migliorato la valutazione inferiore per il TSP da 23 a 24.  $\square$

**Esempio 14.2.4.** Un dirigente di una grande società informatica con sede a Roma vuole presentare in alcune capitali europee il nuovo software prodotto. Egli vuole cercare il tragitto che gli faccia percorrere la minima distanza complessiva. Le distanze (in km) tra le città che deve visitare sono espresse nella seguente tabella:

|           | Berlino | Bruxelles | Dublino | Lisbona | Londra | Madrid | Parigi | Roma |
|-----------|---------|-----------|---------|---------|--------|--------|--------|------|
| Atene     | 2556    | 3025      | 3933    | 4673    | 3399   | 4029   | 3058   | 1417 |
| Berlino   |         | 789       | 1530    | 2892    | 996    | 2360   | 1100   | 1529 |
| Bruxelles |         |           | 908     | 2088    | 374    | 1556   | 296    | 1545 |
| Dublino   |         |           |         | 2791    | 534    | 2259   | 999    | 2436 |
| Lisbona   |         |           |         |         | 2257   | 644    | 1792   | 2730 |
| Londra    |         |           |         |         |        | 1725   | 465    | 1902 |
| Madrid    |         |           |         |         |        |        | 1260   | 2086 |
| Parigi    |         |           |         |         |        |        |        | 1437 |

Applicando il Branch and Bound si trova che il percorso ottimo di 11191 km è:

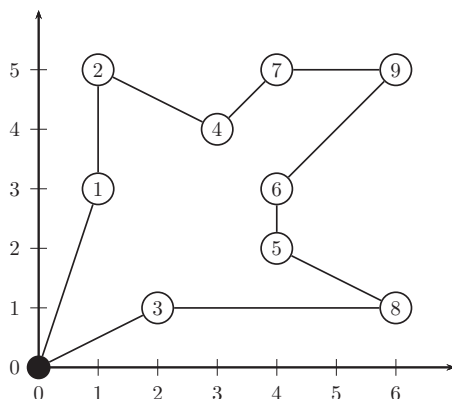
Roma-Atene-Berlino-Bruxelles-Dublino-Londra-Parigi-Lisbona-Madrid-Roma.

$\square$

**Esempio 14.2.5.** In una cella robotizzata vengono immerse delle piastre che costituiscono il supporto di un circuito elettronico. Per inserire i componenti vanno praticati  $n$  fori in posizioni assegnate. Bisogna determinare l'ordine in cui effettuare le perforazioni, minimizzando la lunghezza totale del percorso. Si costruisce un grafo con  $n$  nodi associati ai fori e l' $n + 1$ -esimo associato alla posizione di riposo del trapano. Ad ogni arco  $(i, j)$  si associa un costo  $c_{ij}$  pari alla distanza tra  $i$  e  $j$ . Il problema equivale alla ricerca del ciclo hamiltoniano di costo minimo su tale grafo. Supponiamo che la posizione di riposo del trapano abbia coordinate  $(0,0)$  e che le coordinate dei 9 fori siano riportate in tabella:

| foro       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| coordinate | (1,3) | (1,5) | (2,1) | (3,4) | (4,2) | (4,3) | (4,5) | (6,1) | (6,5) |

La figura seguente descrive il percorso con la minima distanza complessiva calcolato con il metodo del Branch and Bound.



□



# Capitolo 15

## Esercizi di PLI

1. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 21 | 22 | 30 | 25 |
| 2     |    | 24 | 20 | 32 |
| 3     |    |    | 17 | 18 |
| 4     |    |    |    | 19 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.
  - b) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo del problema facendo un rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli sul grado dei nodi diversi da 5, scegliendo come vettore dei moltiplicatori quello ottenuto dopo un passo del metodo del sopragradiente a partire da  $\mu^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .
  - c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili  $x_{45}$ ,  $x_{34}$ ,  $x_{25}$ .
2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 10 | 21 | 34 | 22 |
| 2     |    | 23 | 20 | 4  |
| 3     |    |    | 28 | 20 |
| 4     |    |    |    | 15 |

## 15. ESERCIZI DI PLI

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.
- b) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo del problema facendo un rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli sul grado dei nodi diversi da 2, scegliendo come vettore dei moltiplicatori quello ottenuto dopo un passo del metodo del sopragradiente a partire da  $\mu^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{14}$ ,  $x_{34}$ ,  $x_{25}$ .
3. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 31 | 25 | 28 | 21 |
| 2     |    | 29 | 23 | 10 |
| 3     |    |    | 34 | 20 |
| 4     |    |    |    | 11 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.
- b) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo del problema facendo un rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli sul grado dei nodi diversi da 5, scegliendo come vettore dei moltiplicatori quello ottenuto dopo un passo del metodo del sopragradiente a partire da  $\mu^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{25}$ ,  $x_{34}$ ,  $x_{45}$ .
4. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 33 | 22 | 28 | 21 |
| 2     |    | 29 | 31 | 27 |
| 3     |    |    | 25 | 28 |
| 4     |    |    |    | 20 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

## 15. ESERCIZI DI PLI

- b) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo del problema facendo un rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli sul grado dei nodi diversi da 5, scegliendo come vettore dei moltiplicatori quello ottenuto dopo un passo del metodo del sopragradiente a partire da  $\mu^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{45}$ ,  $x_{15}$ ,  $x_{24}$ .
5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 23 | 22 | 20 | 27 |
| 2     |    | 14 | 15 | 24 |
| 3     |    |    | 26 | 30 |
| 4     |    |    |    | 32 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2-albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.
- b) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo del problema facendo un rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli sul grado dei nodi diversi da 2, scegliendo come vettore dei moltiplicatori quello ottenuto dopo un passo del metodo del sopragradiente a partire da  $\mu^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{23}$ ,  $x_{24}$ ,  $x_{35}$ .
6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 17 | 24 | 23 | 18 |
| 2     |    | 30 | 25 | 26 |
| 3     |    |    | 27 | 32 |
| 4     |    |    |    | 19 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 1-albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

## 15. ESERCIZI DI PLI

- b) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo del problema facendo un rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli sul grado dei nodi diversi da 1, scegliendo come vettore dei moltiplicatori quello ottenuto dopo un passo del metodo del sopragradiente a partire da  $\mu^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{12}$ ,  $x_{15}$ ,  $x_{45}$ .
7. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 27 | 19 | 23 | 25 |
| 2     |    | 34 | 27 | 30 |
| 3     |    |    | 16 | 26 |
| 4     |    |    |    | 14 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.
- b) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo del problema facendo un rilassamento lagrangiano rispetto ai vincoli sul grado dei nodi diversi da 4, scegliendo come vettore dei moltiplicatori quello ottenuto dopo un passo del metodo del sopragradiente a partire da  $\mu^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{13}$ ,  $x_{45}$ ,  $x_{12}$ .
8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 13 | 11 | 26 | 14 |
| 2     |    | 12 | 27 | 16 |
| 3     |    |    | 19 | 20 |
| 4     |    |    |    | 17 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.
- b) Risolvere il rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_0}$  con  $\mu^0 = (2, -1, 0, -1, 0)$ . Calcolare un sopragradiente  $g^0$ , aggiornare il vettore  $\mu^1$  ottenuto dopo un'iterazione del metodo del sopragradiente, e risolvere il nuovo rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_1}$ .

# 15. ESERCIZI DI PLI

- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{13}$ ,  $x_{35}$ ,  $x_{23}$ .
9. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 12 | 14 | 15 | 22 |
| 2     |    | 14 | 19 | 17 |
| 3     |    |    | 21 | 20 |
| 4     |    |    |    | 16 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.
- b) Risolvere il rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_0}$  con  $\mu^0 = (3, -1, 0, -1, -1)$ . Calcolare un sopragradiente  $g^0$ , aggiornare il vettore  $\mu^1$  ottenuto dopo un'iterazione del metodo del sopragradiente, e risolvere il nuovo rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_1}$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{13}$ ,  $x_{23}$ ,  $x_{12}$ .
10. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 16 | 19 | 18 | 27 |
| 2     |    | 9  | 19 | 25 |
| 3     |    |    | 22 | 11 |
| 4     |    |    |    | 28 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.
- b) Risolvere il rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_0}$  con  $\mu^0 = (0, 2, 0, -1, -1)$ . Calcolare un sopragradiente  $g^0$ , aggiornare il vettore  $\mu^1$  ottenuto dopo un'iterazione del metodo del sopragradiente, e risolvere il nuovo rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_1}$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{23}$ ,  $x_{35}$ ,  $x_{25}$ .

# 15. ESERCIZI DI PLI

11. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 14 | 20 | 18 | 15 |
| 2     |    | 13 | 11 | 21 |
| 3     |    |    | 12 | 19 |
| 4     |    |    |    | 16 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.
- b) Risolvere il rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_0}$  con  $\mu^0 = (1, 1, 0, 1, -3)$ . Calcolare un sopragradiente  $g^0$ , aggiornare il vettore  $\mu^1$  ottenuto dopo un’iterazione del metodo del sopragradiente, e risolvere il nuovo rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_1}$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili  $x_{23}$ ,  $x_{34}$ ,  $x_{24}$ .
12. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 24 | 19 | 31 | 9  |
| 2     |    | 20 | 18 | 16 |
| 3     |    |    | 21 | 4  |
| 4     |    |    |    | 7  |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.
- b) Risolvere il rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_0}$  con  $\mu^0 = (-2, 1, 0, 1, 0)$ . Calcolare un sopragradiente  $g^0$ , aggiornare il vettore  $\mu^1$  ottenuto dopo un’iterazione del metodo del sopragradiente, e risolvere il nuovo rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_1}$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili  $x_{14}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{35}$ .
13. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

15. ESERCIZI DI PLI

| città | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|
| 1     | 14 | 20 | 19 | 13 |
| 2     |    | 28 | 21 | 15 |
| 3     |    |    | 18 | 16 |
| 4     |    |    |    | 26 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.
- b) Risolvere il rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_0}$  con  $\mu^0 = (-2, 0, 1, 0, 1)$ . Calcolare un sopragradiente  $g^0$ , aggiornare il vettore  $\mu^1$  ottenuto dopo un’iterazione del metodo del sopragradiente, e risolvere il nuovo rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_1}$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili  $x_{25}$ ,  $x_{15}$ ,  $x_{23}$ .
14. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2 | 3 | 4  | 5  |
|-------|---|---|----|----|
| 1     | 6 | 9 | 24 | 14 |
| 2     |   | 8 | 17 | 10 |
| 3     |   |   | 20 | 21 |
| 4     |   |   |    | 15 |

- a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.
- b) Risolvere il rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_0}$  con  $\mu^0 = (-1, -1, 0, 0, 2)$ . Calcolare un sopragradiente  $g^0$ , aggiornare il vettore  $\mu^1$  ottenuto dopo un’iterazione del metodo del sopragradiente, e risolvere il nuovo rilassamento lagrangiano  $P_{\mu_1}$ .
- c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili  $x_{35}$ ,  $x_{14}$ ,  $x_{12}$ .
15. Si consideri il problema di caricare un contenitore di capacità 7 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta). Per ognuna delle seguenti istanze rispondere ai quesiti:
- Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l’algoritmo greedy.

# 15. ESERCIZI DI PLI

- Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.
- Risolvere il problema applicando il metodo del Branch and Bound. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.
- Risolvere il problema applicando l'algoritmo di programmazione dinamica.

(a)

|        |   |   |    |    |
|--------|---|---|----|----|
| Beni   | 1 | 2 | 3  | 4  |
| Valori | 6 | 9 | 18 | 11 |
| Volumi | 3 | 6 | 7  | 2  |

(b)

|        |    |    |   |    |
|--------|----|----|---|----|
| Beni   | 1  | 2  | 3 | 4  |
| Valori | 24 | 14 | 9 | 21 |
| Volumi | 3  | 2  | 7 | 4  |

(c)

|        |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|
| Beni   | 1  | 2  | 3  | 4  |
| Valori | 14 | 13 | 24 | 15 |
| Volumi | 7  | 2  | 3  | 4  |

(d)

|        |    |   |    |    |
|--------|----|---|----|----|
| Beni   | 1  | 2 | 3  | 4  |
| Valori | 18 | 5 | 15 | 19 |
| Volumi | 4  | 5 | 2  | 3  |

(e)

|        |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|
| Beni   | 1  | 2  | 3  | 4  |
| Valori | 17 | 15 | 19 | 16 |
| Volumi | 7  | 2  | 5  | 4  |

(f)

|        |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|
| Beni   | 1  | 2  | 3  | 4  |
| Valori | 20 | 24 | 12 | 14 |
| Volumi | 6  | 2  | 3  | 5  |

(g)

|        |   |    |    |    |
|--------|---|----|----|----|
| Beni   | 1 | 2  | 3  | 4  |
| Valori | 5 | 24 | 14 | 17 |
| Volumi | 5 | 7  | 3  | 6  |

(h)

|        |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|
| Beni   | 1  | 2  | 3  | 4  |
| Valori | 17 | 24 | 14 | 13 |
| Volumi | 6  | 2  | 4  | 3  |

(i)

|        |   |    |    |   |
|--------|---|----|----|---|
| Beni   | 1 | 2  | 3  | 4 |
| Valori | 9 | 13 | 19 | 7 |
| Volumi | 4 | 6  | 3  | 2 |

(j)

|        |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|
| Beni   | 1  | 2  | 3  | 4  |
| Valori | 19 | 14 | 18 | 10 |
| Volumi | 5  | 3  | 4  | 2  |

(k)

|        |    |    |    |   |
|--------|----|----|----|---|
| Beni   | 1  | 2  | 3  | 4 |
| Valori | 12 | 10 | 15 | 9 |
| Volumi | 2  | 6  | 8  | 4 |

(l)

|        |    |   |   |   |
|--------|----|---|---|---|
| Beni   | 1  | 2 | 3 | 4 |
| Valori | 11 | 5 | 6 | 7 |
| Volumi | 3  | 2 | 4 | 6 |

(m)

|        |    |    |   |    |
|--------|----|----|---|----|
| Beni   | 1  | 2  | 3 | 4  |
| Valori | 18 | 16 | 7 | 22 |
| Volumi | 5  | 3  | 4 | 2  |

(n)

|        |   |    |   |    |
|--------|---|----|---|----|
| Beni   | 1 | 2  | 3 | 4  |
| Valori | 7 | 11 | 8 | 21 |
| Volumi | 2 | 5  | 3 | 4  |

16. Risolvere i problemi dell'esercizio precedente supponendo che le variabili siano intere invece che binarie.



# 15. ESERCIZI DI PLI

17. Calcolare un taglio di Gomory per ciascuno dei seguenti problemi:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} \max & 6x_1 + 14x_2 \\ & 7x_1 + 14x_2 \leq 40 \\ & 16x_1 + 7x_2 \leq 48 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} \min & 12x_1 + 11x_2 \\ & 5x_1 + 6x_2 \geq 62 \\ & 10x_1 + 5x_2 \geq 58 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad \begin{cases} \min & 14x_1 + 11x_2 \\ & 7x_1 + 19x_2 \geq 40 \\ & 13x_1 + 15x_2 \geq 52 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} \min & 8x_1 + 12x_2 \\ & 17x_1 + 13x_2 \geq 66 \\ & 8x_1 + 10x_2 \geq 41 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad \begin{cases} \max & 7x_1 + 9x_2 \\ & 17x_1 + 10x_2 \leq 53 \\ & 13x_1 + 12x_2 \leq 45 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} \min & 9x_1 + 5x_2 \\ & 10x_1 + 8x_2 \geq 62 \\ & 5x_1 + 13x_2 \geq 44 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\
 \text{(g)} \quad \begin{cases} \max & 7x_1 + 11x_2 \\ & 19x_1 + 7x_2 \leq 60 \\ & 11x_1 + 10x_2 \leq 54 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} & \text{(h)} \quad \begin{cases} \max & 6x_1 + 13x_2 \\ & 6x_1 + 9x_2 \leq 62 \\ & 19x_1 + 5x_2 \leq 49 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\
 \text{(i)} \quad \begin{cases} \min & 14x_1 + 7x_2 \\ & 5x_1 + 10x_2 \geq 51 \\ & 8x_1 + 9x_2 \geq 49 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} & \text{(j)} \quad \begin{cases} \min & 12x_1 + 7x_2 \\ & 14x_1 + 12x_2 \geq 62 \\ & 6x_1 + 14x_2 \geq 58 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\
 \text{(k)} \quad \begin{cases} \max & 5x_1 + 14x_2 \\ & 13x_1 + 7x_2 \leq 58 \\ & 12x_1 + 12x_2 \leq 67 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} & \text{(l)} \quad \begin{cases} \min & 5x_1 + 14x_2 \\ & 7x_1 + 19x_2 \geq 46 \\ & 11x_1 + 19x_2 \geq 50 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\
 \text{(m)} \quad \begin{cases} \max & 14x_1 + 13x_2 \\ & 10x_1 + 17x_2 \leq 64 \\ & 7x_1 + 17x_2 \leq 49 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} & \text{(n)} \quad \begin{cases} \max & 12x_1 + 5x_2 \\ & 5x_1 + 19x_2 \leq 61 \\ & 6x_1 + 9x_2 \leq 46 \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}
 \end{array}$$

18. Risolvere i problemi dell'esercizio precedente con il metodo del Branch and Bound.



## Parte IV

# Programmazione Non Lineare (PNL)



# Capitolo 16

## Problemi e modelli di PNL

### 16.1 Data fitting

Date  $m$  osservazioni sperimentali  $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  corrispondenti ad osservazioni effettuate nei punti  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ , supponiamo di sapere che la grandezza  $b$  sia una funzione polinomiale della grandezza  $a$ . Si vuole trovare un polinomio di grado al più  $n - 1$  che approssimi al meglio i dati sperimentali. Consideriamo un generico polinomio di grado  $n - 1$  con coefficienti  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$p(a) = x_1 + x_2 a + x_3 a^2 + \dots + x_n a^{n-1},$$

e chiamiamo residuo il vettore  $r \in \mathbb{R}^m$  definito da

$$r_i = p(a_i) - b_i.$$

Ogni componente di  $r$  rappresenta la differenza tra il valore previsto dal modello polinomiale nel punto  $a_i$  ed il valore sperimentale  $b_i$ . Per trovare la migliore approssimazione dei dati sperimentali cerchiamo il vettore dei coefficienti  $x = (x_1, \dots, x_n)$  che rende minima la norma del residuo. Tale problema si può formulare come:

$$\begin{cases} \min_x f(x) = \|Ax - b\| \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (16.1)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Osserviamo che dalla convessità della norma segue che la funzione  $f$  è convessa qualunque sia la norma utilizzata, infatti:

$$\begin{aligned}
 f(tx + (1-t)y) &= \|A(tx + (1-t)y) - b\| \\
 &= \|tAx + (1-t)Ay - b\| \\
 &= \|tAx + (1-t)Ay - tb - (1-t)b\| \\
 &= \|t(Ax - b) + (1-t)(Ay - b)\| \\
 &\leq t\|Ax - b\| + (1-t)\|Ay - b\| \\
 &= tf(x) + (1-t)f(y)
 \end{aligned}$$

Nel caso in cui la norma utilizzata sia la norma euclidea, cioè  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , il problema (16.1) equivale al seguente

$$\begin{cases} \min \|Ax - b\|^2 = x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

in cui la funzione obiettivo è quadratica. Tale problema è noto come problema “dei minimi quadrati”.

Consideriamo ora un altro problema di approssimazione ottimale di dati sperimentali. Supponiamo di avere  $m$  osservazioni sperimentali  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  di una grandezza scalare che dipende *in modo lineare* da un vettore di  $n-1$  parametri. In questo caso cerchiamo l'iperpiano in  $\mathbb{R}^n$  che approssima al meglio i dati. Se l' $i$ -esima osservazione effettuata nel punto  $a_{i1}, \dots, a_{i,n-1}$  ha valore  $b_i$ , allora il residuo  $i$ -esimo è dato da

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j + x_n - b_i.$$

Il problema di trovare i coefficienti  $(x_1, \dots, x_n)$  dell'iperpiano che minimizzano la norma del residuo ha la stessa forma del problema (16.1) dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

## 16.2 Portafoglio ottimale

Supponiamo che un investitore abbia a disposizione un capitale  $C$  da investire in  $n$  titoli (azioni, obbligazioni, buoni del tesoro, etc.). La rendita di ogni titolo  $i$  può essere rappresentata da una variabile aleatoria  $T_i$  di media  $m_i$  e varianza  $\sigma_i^2$  che descrive il rischio associato al titolo. Se l'investitore sceglie di investire una quota  $x_i$  del capitale sul titolo  $i$ ,

la rendita del suo investimento è rappresentata dalla variabile aleatoria  $I = \sum_{i=1}^n x_i T_i$ . Il valore medio della rendita è una funzione lineare di  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$E[I] = \sum_{i=1}^n x_i E[T_i] = \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$

mentre la varianza della rendita è una funzione quadratica di  $x$ , infatti:

$$\begin{aligned} E[(I - E[I])^2] &= E \left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i T_i - \sum_{i=1}^n x_i m_i \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i (T_i - m_i) \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (T_i - m_i) (T_j - m_j) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E[(T_i - m_i) (T_j - m_j)] \\ &= x^T Q x \end{aligned}$$

dove  $Q_{ij} = E[(T_i - m_i) (T_j - m_j)]$  è la matrice delle covarianze dei titoli  $T_i$ .

Un possibile problema per l'investitore è quello di scegliere tra tutti gli investimenti  $x = (x_1, \dots, x_n)$  che garantiscono una rendita media pari almeno ad un valore prefissato  $m$  quello che abbia il minimo rischio (varianza). Tale problema può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \min & x^T Q x \\ & \sum_{i=1}^n m_i x_i \geq m \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

D'altra parte un altro problema per l'investitore potrebbe essere quello di cercare tra tutti gli investimenti che hanno un rischio inferiore ad un valore prefissato  $r$  quello che abbia la massima rendita media, ossia:

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n m_i x_i \\ & x^T Q x \leq r \\ & x \geq 0 \end{cases}$$





# Capitolo 17

## Teoria della PNL

In questo capitolo studieremo i problemi di PNL della forma:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (17.1)$$

dove non tutte le funzioni  $f$ ,  $g_i$  con  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_j$  con  $j = 1, \dots, p$  sono lineari. Per semplicità supporremo che tali funzioni siano di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su un insieme aperto che contiene la regione ammissibile

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\}.$$

La ricerca dei punti di minimo procede cercando di trovare proprietà che caratterizzano tali punti. In questo capitolo tratteremo alcune condizioni di ottimalità necessarie e/o sufficienti. In particolare, stabilire una condizione necessaria di ottimalità significa trovare una condizione che sia verificata da tutti i punti di minimo; tuttavia può succedere che tale condizione sia soddisfatta anche da punti che non sono né di minimo né di massimo. Stabilire una condizione sufficiente di ottimalità significa invece trovare una condizione che garantisce che il punto trovato sia un minimo; d'altra parte però è possibile che tale condizione non sia soddisfatta da tutti i punti di minimo.

### 17.1 Esistenza di ottimi globali

In questo paragrafo vediamo alcune condizioni che garantiscono l'esistenza di minimi globali di  $f$  su  $\Omega$ . Il primo teorema è una diretta conseguenza del Teorema di Weierstrass (vedi pag. 369).

**Teorema 17.1.1.** *Se la regione  $\Omega$  è limitata, allora esiste un minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ .*

**Dimostrazione.** Poiché i vincoli  $g$  ed  $h$  sono funzioni continue, la regione  $\Omega$  è un insieme chiuso. L'esistenza di un minimo globale segue quindi dal Teorema di Weierstrass.  $\square$

Ad esempio, la funzione  $f(x) = x_1 + x_2$  ammette minimo globale sulla regione

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0\},$$

che coincide con il cerchio di centro  $(0,0)$  e raggio 2. Disegnando gli insiemi di livello di  $f$  si trova facilmente che  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  è il minimo globale.

Nel caso in cui la regione  $\Omega$  non sia limitata, ci si può ricondurre al Teorema di Weierstrass aggiungendo ipotesi sugli insiemi di livello di  $f$ .

**Teorema 17.1.2.** *Se esiste uno scalare  $\alpha$  tale che il sottolivello  $L_\alpha = \{x \in \Omega : f(x) \leq \alpha\}$  è non vuoto e limitato, allora esiste un minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ .*

**Dimostrazione.** Dalla continuità delle funzioni  $f$ ,  $g$  ed  $h$  segue che  $L_\alpha^-$  è chiuso, quindi per il Teorema di Weierstrass esiste un minimo globale di  $f$  su  $L_\alpha$ , che risulta essere anche un minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ .  $\square$

Ad esempio, la funzione  $f(x) = e^{x_1+x_2}$  ammette un minimo globale sulla regione non limitata

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \leq 0, \quad -2x_1 + x_2 \leq 0\},$$

perché se  $\alpha > 1$  il sottolivello

$$L_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \leq 0, \quad -2x_1 + x_2 \leq 0, \quad x_1 + x_2 \leq \log \alpha\}$$

è non vuoto e limitato. È facile controllare che il minimo globale è  $(0,0)$ .

**Corollario 17.1.1.** *Se  $f$  è coerciva<sup>1</sup>, allora esiste un minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ .*

**Dimostrazione.** Se scegliamo uno scalare  $\alpha > \inf_{x \in \Omega} f(x)$ , allora il sottolivello  $L_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$  è non vuoto (per come abbiamo scelto  $\alpha$ ) e limitato (perché  $f$  è coerciva). Quindi dal Teorema 17.1.2 segue che esiste un minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ .  $\square$

Ad esempio la funzione  $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 + x_2$ . Tale funzione quadratica è coerciva perché la sua matrice hessiana  $Q = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  è definita positiva, quindi esiste un minimo globale di  $f$  su  $\mathbb{R}^2$ .

Osserviamo che la coercività è solo una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di minimi globali, ovvero quando  $f$  non è coerciva, ci possono essere casi in cui  $f$  ammette un minimo globale e casi in cui non lo ammette. Ad esempio, la funzione  $f(x) = \sin(x_1 x_2)$  non è coerciva (perché è limitata tra  $-1$  ed  $1$ ) e ammette minimi globali su  $\mathbb{R}^2$  in tutti i punti  $(x_1, x_2)$  in cui  $x_1 x_2$  è un multiplo intero di  $\pi$ . La funzione  $f(x) = x_1 - x_2$  non è coerciva e non ammette minimi globali su  $\mathbb{R}^2$  perché per la successione  $x_k = (0, k)$  si ha che  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = -\infty$ .

---

<sup>1</sup>vedi la definizione a pag. 374.

Dalla definizione di minimo globale segue che se  $f$  ammette un minimo globale su  $\Omega$ , allora in particolare è limitata inferiormente su  $\Omega$ , cioè esiste uno scalare  $M$  tale che  $f(x) \geq M$  per ogni  $x \in \Omega$ . Quindi, per dimostrare che  $f$  non ammette un minimo globale su  $\Omega$ , è sufficiente dimostrare che  $f$  non è limitata inferiormente su  $\Omega$ , ossia basta trovare una successione di punti  $\{x_k\} \subset \Omega$  per cui si ha che  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = -\infty$ . Ad esempio, la funzione  $f(x) = x_1^3 + x_2^2$  non ammette un minimo globale su  $\mathbb{R}^2$  perché scegliendo la successione  $x_k = (-k, 0)$  si ha  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = -\infty$ . Tuttavia, una funzione limitata inferiormente non ammette sempre un minimo globale. Ad esempio, la funzione  $f(x) = e^{x_1+x_2}$  è limitata inferiormente su  $\mathbb{R}^2$ , perché  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^2$ , ma non ammette un minimo globale su  $\mathbb{R}^2$  perché  $\inf_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = 0$  e non esiste un punto  $x^*$  tale che  $f(x^*) = 0$ .

Per analizzare l'esistenza dei minimi globali di  $f$  nel caso in cui  $f$  non sia coerciva e sia limitata inferiormente, non è possibile applicare i risultati generali visti finora ed è necessario studiare direttamente la funzione  $f$ . Ad esempio, la funzione  $f(x) = x_1^2 - 2x_1 + 1$  non è coerciva perché assume valore 0 sulla successione di punti  $x_k = (0, k)$ , ed è limitata inferiormente perché  $f(x) = (x_1 - 1)^2 \geq 0$ . In questo caso possiamo notare che nel punto  $(1, 0)$  la funzione assume valore 0 e quindi  $(1, 0)$  è un minimo globale di  $f$  (in realtà i minimi globali sono tutti i punti del tipo  $(1, x_2)$  al variare di  $x_2 \in \mathbb{R}$ ).

## 17.2 Regolarità dei vincoli

In questo paragrafo tratteremo una condizione di regolarità sui vincoli che verrà usata in seguito per ottenere condizioni di ottimalità. Tale condizione si basa sui concetti di *cono tangente* e di *cono delle direzioni ammissibili del primo ordine*.

**Definizione 17.2.1.** (Cono tangente)

Dato un punto  $x \in \Omega$ , un vettore  $d$  è detto tangente a  $\Omega$  in  $x$  se esiste una successione di punti  $\{z_k\} \subset \Omega$  con  $z_k \rightarrow x$  ed una successione di scalari positivi  $\{t_k\}$  con  $t_k \rightarrow 0$  tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x}{t_k} = d.$$

L'insieme di tali vettori è chiamato cono tangente a  $\Omega$  in  $x$  e denotato con  $T_\Omega(x)$ .

È facile verificare che  $T_\Omega(x)$  è un cono: infatti se  $d$  è un vettore tangente, con le corrispondenti successioni  $\{z_k\}$  e  $\{t_k\}$ , allora sostituendo ogni  $t_k$  con  $\alpha^{-1}t_k$  si ottiene che anche il vettore  $\alpha d$  è tangente per ogni  $\alpha > 0$ .

**Definizione 17.2.2.** (Cono delle direzioni ammissibili del primo ordine)

Dato un punto  $x \in \Omega$ , indichiamo con  $\mathcal{A}(x)$  l'insieme dei vincoli di disuguaglianza che sono attivi in  $x$ , cioè  $\mathcal{A}(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$ . L'insieme

$$D(x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} d^T \nabla g_i(x) \leq 0 & \forall i \in \mathcal{A}(x), \\ d^T \nabla h_j(x) = 0 & \forall j = 1, \dots, p \end{array} \right\}$$

viene chiamato cono delle direzioni ammissibili del primo ordine nel punto  $x$ .

Come per il cono tangente è facile verificare che  $D(x)$  è un cono. Notiamo che nella definizione di  $D(x)$  compaiono tutti i vincoli di uguaglianza  $h_j$  e solo i vincoli di disuguaglianza  $g_i$  che sono attivi nel punto  $x$ .

**Definizione 17.2.3.** (Regolarità dei vincoli)

I vincoli del problema (17.1) si dicono regolari in un punto  $x \in \Omega$  se  $T_\Omega(x) = D(x)$ .

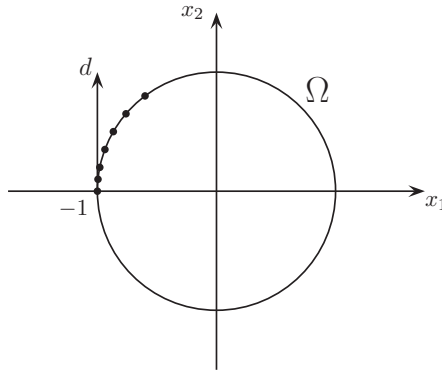
Vediamo ora alcuni esempi che illustrano questa definizione di regolarità dei vincoli.

**Esempio 17.2.1.** Cerchiamo il minimo della funzione  $f(x) = x_1$  sulla regione  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$ , che è la circonferenza di centro  $(0,0)$  e raggio 1. È facile notare che il minimo (globale) è il punto  $x^* = (-1, 0)$ . Studiamo la regolarità del vincolo in tale punto.

Calcoliamo prima il cono tangente ad  $\Omega$  in  $(-1, 0)$ . Una successione di punti ammissibili che converge a  $(-1, 0)$  può essere definita come

$$z_k = \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}, \frac{1}{k} \right).$$

Se scegliamo la successione di scalari  $t_k = \|z_k - x^*\|$ , allora otteniamo il vettore tangente  $d = (0, 1)$ .



In modo analogo, se scegliamo le successioni

$$z_k = \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}, -\frac{1}{k} \right).$$

e ancora  $t_k = \|z_k - x^*\|$ , otteniamo il vettore tangente  $d = (0, -1)$ . Quindi il cono tangente a  $\Omega$  in  $(-1, 0)$  è

$$T_\Omega(-1, 0) = \{(0, d_2) : d_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Passiamo al cono delle direzioni ammissibili del primo ordine. Poiché  $\nabla h(-1, 0) = (-2, 0)$ , dobbiamo trovare i vettori  $d \in \mathbb{R}^2$  tali che

$$0 = d^T \nabla h(-1, 0) = -2 d_1,$$

quindi otteniamo che  $D(-1, 0) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 = 0\}$  coincide con  $T_\Omega(-1, 0)$ , quindi il vincolo è regolare nel punto  $(-1, 0)$ .  $\square$

**Esempio 17.2.2.** Modifichiamo l'esercizio precedente considerando la regione  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}$ . Anche in questo caso il minimo globale è il punto  $x^* = (-1, 0)$ . Anche in questo esempio studiamo la regolarità del vincolo in tale punto.

Calcoliamo prima il cono tangente ad  $\Omega$  in  $(-1, 0)$ . In questo caso, oltre alle due successioni  $\{z_k\}$  che abbiamo considerato nell'esempio precedente, dobbiamo tenere conto anche delle infinite successioni di punti appartenenti ad un segmento che convergono verso  $(-1, 0)$  dall'interno del cerchio. Queste successioni sono del tipo

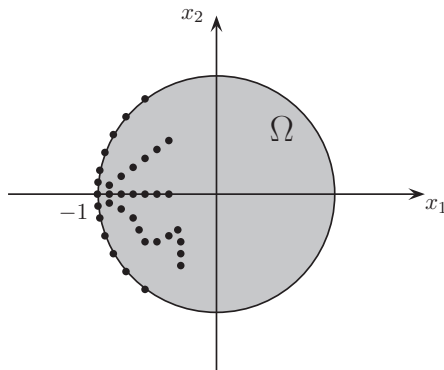
$$z_k = (-1, 0) + \frac{1}{k} d,$$

dove  $d$  è un vettore con la prima componente positiva, cioè  $d_1 > 0$ . I punti  $z_k$  sono ammissibili se  $\|z_k\| \leq 1$ , cioè se

$$\left(-1 + \frac{d_1}{k}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{k}\right)^2 \leq 1,$$

che è vero per  $k \geq \frac{\|d\|^2}{2d_1}$ . Scegliendo  $t_k = \frac{\|z_k - x^*\|}{\|d\|}$  otteniamo che  $d$  è un vettore tangente. Inoltre dovremmo considerare anche le successioni che convergono verso  $(-1, 0)$  lungo una curva dall'interno del cerchio, ma si troverebbero vettori tangenti già calcolati in precedenza. Riassumendo, il cono tangente ad  $\Omega$  in  $(-1, 0)$  è

$$T_\Omega(-1, 0) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 0\}.$$



Passiamo ora al cono delle direzioni ammissibili del primo ordine. Poiché il vincolo  $g$  è attivo in  $(-1, 0)$  e  $\nabla g(-1, 0) = (-2, 0)$ , dobbiamo trovare i vettori  $d \in \mathbb{R}^2$  tali che

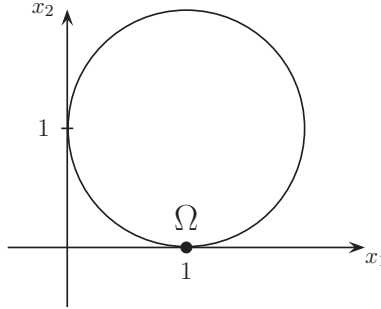
$$d^T \nabla g(-1, 0) = -2 d_1 \leq 0,$$

quindi otteniamo che  $D(-1, 0) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 0\}$  coincide con  $T_\Omega(-1, 0)$ , quindi il vincolo è regolare nel punto  $(-1, 0)$ .  $\square$

**Esempio 17.2.3.** Cerchiamo il minimo della funzione  $f(x) = x_1 + x_2$  sulla regione

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0, \quad x_2 \leq 0\},$$

che coincide con il solo punto  $(1, 0)$ . In questo punto è ovvio che il cono tangente sia  $T_\Omega(1, 0) = \{(0, 0)\}$ , poiché l'unica successione ammissibile che converge a  $(1, 0)$  è la successione costante  $z_k = (1, 0)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .



Inoltre, entrambi i vincoli sono attivi in  $(1, 0)$ , abbiamo che  $\nabla g_1(1, 0) = (0, -2)$  e  $\nabla g_2(1, 0) = (0, 1)$  e quindi il cono delle direzioni ammissibili del primo ordine è  $D(1, 0) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_2 = 0\}$  che non coincide con  $T_\Omega(1, 0)$ . Pertanto i vincoli non sono regolari nel punto  $(1, 0)$ .  $\square$

**Osservazione 17.2.1.** La definizione di cono tangente si basa solo sulla geometria della regione  $\Omega$  e non sulla sua descrizione algebrica. Al contrario, il cono delle direzioni ammissibili del primo ordine dipende dalla definizione algebrica dei vincoli. Consideriamo ad esempio la regione  $\Omega$  dell'Esempio 17.2.1. Tale insieme può essere definito anche nel modo seguente:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 = 0\}.$$

In questo caso il gradiente del vincolo è

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ 4x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \Omega,$$

quindi il cono delle direzioni ammissibili del primo ordine è  $D(x) = \mathbb{R}^2$  per ogni punto  $x \in \Omega$ . In questo caso il vincolo non è regolare nel punto  $(-1, 0)$  perché  $D(-1, 0)$  non coincide con  $T_\Omega(-1, 0) = \{(0, d_2) : d_2 \in \mathbb{R}\}$ .  $\square$

Vediamo ora alcune condizioni che garantiscono la regolarità dei vincoli.

**Teorema 17.2.1.**

1. (Vincoli lineari) Se  $g_i$  e  $h_j$  sono funzioni lineari per ogni  $i = 1, \dots, m$  e per ogni  $j = 1, \dots, p$ , allora i vincoli sono regolari in ogni punto  $x \in \Omega$ .
2. (Condizione di Slater) Se le funzioni  $g_i$  sono convesse per ogni  $i = 1, \dots, m$ , le funzioni  $h_j$  sono lineari per ogni  $j = 1, \dots, p$  ed esiste  $\bar{x}$  tale che  $g(\bar{x}) < 0$  e  $h(\bar{x}) = 0$ , allora i vincoli sono regolari in ogni punto  $x \in \Omega$ .
3. (Indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi) Se  $\bar{x} \in \Omega$  ed i vettori

$$\begin{cases} \nabla g_i(\bar{x}) & \text{per } i \in \mathcal{A}(\bar{x}), \\ \nabla h_j(\bar{x}) & \text{per } j = 1, \dots, p \end{cases}$$

sono linearmente indipendenti, allora i vincoli sono regolari nel punto  $\bar{x}$ .

**Dimostrazione.** Per prima cosa dimostriamo che  $T_\Omega(x) \subseteq D(x)$  per ogni  $x \in \Omega$ . Consideriamo un vettore  $d \in T_\Omega(x)$  e siano  $\{z_k\}$  e  $\{t_k\}$  le successioni tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x}{t_k} = d.$$

Allora possiamo scrivere  $z_k = x + t_k d + o(t_k)$ , dove  $o(t_k)$  è un infinitesimo per  $k \rightarrow \infty$  di ordine superiore a  $t_k$ . Applicando lo sviluppo di Taylor al primo ordine ad ogni vincolo  $g_i$  attivo nel punto  $x$  abbiamo:

$$0 \geq \frac{1}{t_k} g_i(x) = \frac{1}{t_k} [g_i(x) + t_k d^\top \nabla g_i(x) + o(t_k)] = d^\top \nabla g_i(x) + \frac{o(t_k)}{t_k}.$$

Passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  otteniamo  $d^\top \nabla g_i(x) \leq 0$ . Ragionando in modo simile per ogni vincolo  $h_j$  abbiamo:

$$0 = \frac{1}{t_k} h_j(x) = \frac{1}{t_k} [h_j(x) + t_k d^\top \nabla h_j(x) + o(t_k)] = d^\top \nabla h_j(x) + \frac{o(t_k)}{t_k},$$

e quindi passando al limite si ottiene  $d^\top \nabla h_j(x) = 0$ . Pertanto  $d \in D(x)$ .

1. Per quanto dimostrato in precedenza è sufficiente provare che  $D(x) \subseteq T_\Omega(x)$  per ogni  $x \in \Omega$ . Consideriamo un vettore  $d \in D(\bar{x})$ . Per ipotesi i vincoli sono lineari e quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} g_i(x) &= a_i^\top x - b_i, & \forall i = 1, \dots, m \\ h_j(x) &= c_j^\top x - d_j, & \forall j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Poiché  $d \in D(x)$ , si ha che

$$\begin{aligned} d^\top a_i &\leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{A}(x) \\ d^\top c_j &= 0, \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Consideriamo una successione di scalari positivi  $t_k \rightarrow 0$ . Allora la successione di punti  $z_k = x + t_k d$  converge verso  $x$ . Dimostriamo che  $\{z_k\} \subset \Omega$  per  $k$  sufficientemente grande. Se  $i \in \mathcal{A}(x)$ , allora

$$g_i(z_k) = a_i^\top z_k - b_i = a_i^\top x - b_i + t_k a_i^\top d = t_k a_i^\top d \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

se  $i \notin \mathcal{A}(x)$ , allora

$$g_i(z_k) = a_i^\top z_k - b_i = \underbrace{a_i^\top x - b_i}_{<0} + t_k a_i^\top d \leq 0 \quad \text{per } k \text{ sufficientemente grande,}$$

ed infine

$$h_j(z_k) = c_j^\top z_k - d_j = c_j^\top x - d_j + t_k c_j^\top d = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Inoltre abbiamo che  $\frac{z_k - x}{t_k} = d$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , quindi il vettore  $d \in T_\Omega(x)$ .

2. Come nel punto precedente basta dimostrare che  $D(x) \subseteq T_\Omega(x)$  per ogni  $x \in \Omega$ . Consideriamo un vettore  $d \in D(x)$ , cioè

$$\begin{aligned} d^\top \nabla g_i(x) &\leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{A}(x) \\ d^\top \nabla h_j(x) &= 0, \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Le funzioni  $g_i$  sono convesse, quindi per ogni  $i \in \mathcal{A}(x)$  si ha

$$(\bar{x} - x)^\top \nabla g_i(x) = g_i(x) + (\bar{x} - x)^\top \nabla g_i(x) \leq g_i(\bar{x}) < 0,$$

inoltre le funzioni  $h_j$  sono lineari, quindi per ogni  $j = 1, \dots, p$  si ha

$$(\bar{x} - x)^\top \nabla h_j(x) = h_j(x) + (\bar{x} - x)^\top \nabla h_j(x) = h_j(\bar{x}) = 0.$$

Definiamo ora la successione di vettori  $d_k = \frac{1}{k}(\bar{x} - x) + (1 - \frac{1}{k})d$ . Dalle relazioni precedenti segue che

$$\begin{aligned} d_k^\top \nabla g_i(x) &< 0, \quad \forall i \in \mathcal{A}(x) \\ d_k^\top \nabla h_j(x) &= 0, \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Consideriamo ora un qualunque indice  $k \in \mathbb{N}$  e dimostriamo che i punti del tipo  $x + t d_k \in \Omega$  per ogni  $t > 0$  sufficientemente piccolo. Infatti, se  $i \in \mathcal{A}(x)$  allora

$$g_i(x + t d_k) = g_i(x) + t d_k^\top \nabla g_i(x) + o(t) = t \underbrace{d_k^\top \nabla g_i(x)}_{<0} + o(t),$$

dove  $o(t)$  è un infinitesimo di ordine superiore a  $t$ , quindi  $g_i(x + t d_k) \leq 0$  per ogni  $t > 0$  sufficientemente piccolo. Se  $i \notin \mathcal{A}(x)$  allora  $g_i(x) < 0$  e quindi per la continuità di  $g_i$  segue che  $g_i(x + t d_k) \leq 0$  per ogni  $t > 0$  sufficientemente piccolo. Inoltre per ogni  $j = 1, \dots, p$  si ha

$$h_j(x + t d_k) = h_j(x) + t d_k^\top \nabla h_j(x) = h_j(x) = 0 \quad \forall t > 0.$$



Quindi esiste uno scalare positivo  $t_k < \frac{1}{k}$  tale che  $x + t_k d_k \in \Omega$ . Se definiamo la successione  $z_k = x + t_k d_k$ , allora abbiamo che  $z_k \in \Omega$ ,  $z_k$  converge ad  $x$  perché  $t_k \rightarrow 0$ , e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x}{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k = d,$$

quindi abbiamo dimostrato che  $d \in T_\Omega(x)$ .

3. Consideriamo un vettore  $d \in D(\bar{x})$ . Dimostreremo che  $d \in T_\Omega(\bar{x})$  usando il Teorema delle funzioni implicite (vedi pag. 371). Denotiamo con  $V$  la matrice  $r \times n$  che ha per righe i gradienti dei vincoli attivi in  $\bar{x}$ , cioè

$$V = \begin{pmatrix} \nabla g_i(\bar{x})^\top \\ \nabla h_j(\bar{x})^\top \end{pmatrix} \quad \text{con } i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \text{ e } j = 1, \dots, p.$$

Per ipotesi, la matrice  $V$  ha rango  $r$ . Indichiamo con  $Z$  la matrice  $(n - r) \times n$  che ha per righe una base del nucleo di  $V$ , cioè  $Z$  ha rango  $n - r$  e  $VZ^\top = 0$ . Consideriamo ora la funzione vettoriale  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita come:

$$F(z, t) = \begin{pmatrix} g_i(z) - t V_i d \\ h_j(z) - t V_j d \\ Z(z - \bar{x} - t d) \end{pmatrix} \quad \text{con } i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \text{ e } j = 1, \dots, p.$$

Tale funzione è di classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $F(\bar{x}, 0) = 0$  e la matrice

$$J_z F(\bar{x}, 0) = \begin{pmatrix} V \\ Z \end{pmatrix}$$

è invertibile. Quindi, per il Teorema delle funzioni implicite, esiste una funzione  $z(t)$  di classe  $\mathcal{C}^1$ , definita in un intorno  $I$  di 0, tale che  $z(0) = \bar{x}$ ,  $F(z(t), t) = 0$  per ogni  $t \in I$  e

$$z'(t) = -[J_z F(z(t), t)]^{-1} J_t F(z(t), t) \quad \forall t \in I.$$

Consideriamo una successione  $\{t_k\}$  di scalari positivi tale che  $t_k \in I$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$ , e definiamo la successione  $z_k = z(t_k)$ . Dalle proprietà della funzione  $z(t)$  e dal fatto che  $d \in D(\bar{x})$ , segue che

$$\begin{aligned} g_i(z_k) &= t_k \nabla g_i(\bar{x})^\top d \leq 0 & i \in \mathcal{A}(\bar{x}), \\ h_j(z_k) &= t_k \nabla h_j(\bar{x})^\top d = 0 & j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Pertanto la successione  $\{z_k\} \subset \Omega$  e dalla continuità di  $z(t)$  segue che  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \bar{x}$ . Dallo sviluppo di Taylor di  $z(t)$  nel punto  $t = 0$  otteniamo che

$$z(t) = z(0) + t z'(0) + o(t) \quad \forall t \in I.$$

Poiché si ha

$$J_t F(z(0), 0) = - \begin{pmatrix} V \\ Z \end{pmatrix} d,$$

allora  $z'(0) = d$ . Perciò otteniamo  $z_k = \bar{x} + t_k d + o(t_k)$  e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - \bar{x}}{t_k} = d.$$

Abbiamo quindi provato che  $d \in T_\Omega(\bar{x})$ . □

### 17.3 Condizioni di ottimalità del primo ordine

**Lemma 17.3.1.** *Se  $x^*$  è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$ , allora*

$$d^T \nabla f(x^*) \geq 0, \quad \forall d \in T_\Omega(x^*).$$

**Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che esista un vettore tangente  $d$  tale che  $d^T \nabla f(x^*) < 0$ . Consideriamo le successioni  $\{z_k\}$  e  $\{t_k\}$  tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x^*}{t_k} = d.$$

Allora abbiamo  $z_k = x^* + t_k d + o(t_k)$ , dove  $o(t_k)$  è un infinitesimo per  $k \rightarrow \infty$  di ordine superiore a  $t_k$ . Applicando lo sviluppo di Taylor al primo ordine di  $f$  otteniamo

$$f(z_k) = f(x^*) + t_k d^T \nabla f(x^*) + o(t_k),$$

quindi esiste un indice  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  tale che

$$\frac{f(z_k) - f(x^*)}{t_k} = d^T \nabla f(x^*) + \frac{o(t_k)}{t_k} < 0 \quad \forall k > \bar{k},$$

cioè  $f(z_k) < f(x^*)$  per ogni  $k > \bar{k}$ , ma questo è impossibile perché  $x^*$  è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$ .  $\square$

Definiamo Lagrangiana del problema (17.1) la funzione

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x),$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu \in \mathbb{R}^p$ .

**Teorema 17.3.1** (Condizione necessaria del primo ordine).

*Se  $x^*$  è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$  ed i vincoli sono regolari in  $x^*$ , allora esistono due vettori  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu^* \in \mathbb{R}^p$  tali che  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  soddisfa il sistema di Lagrange-Kuhn-Tucker (LKT):*

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \lambda^* \geq 0 \\ g(x^*) \leq 0 \\ h(x^*) = 0 \end{cases} \quad (17.2)$$

**Dimostrazione.** Poiché i vincoli sono regolari in  $x^*$ , si ha che  $T_\Omega(x^*) = D(x^*)$ . Inoltre dal Lemma 17.3.1 segue che

$$d^T \nabla f(x^*) \geq 0 \quad \forall d \in D(x^*),$$

### 17.3 CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ DEL PRIMO ORDINE

ossia non esistono soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} d^T \nabla f(x^*) < 0 \\ d^T \nabla g_i(x^*) \leq 0, & \forall i \in \mathcal{A}(x^*), \\ d^T \nabla h_j(x^*) = 0, & \forall j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Allora, per il teorema 2.3.3, esiste una soluzione  $(\alpha, \beta, \gamma)$  del sistema

$$\begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*)} \alpha_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \beta_j \nabla h_j(x^*) - \sum_{j=1}^p \gamma_j \nabla h_j(x^*) = -\nabla f(x^*) \\ \alpha_i \geq 0 & \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \end{cases}$$

Se definiamo i vettori  $\lambda^*$  e  $\mu^*$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &= \begin{cases} \alpha_i & \text{se } i \in \mathcal{A}(x^*) \\ 0 & \text{se } i \notin \mathcal{A}(x^*) \end{cases} & \forall i = 1, \dots, m, \\ \mu_j^* &= \beta_j - \gamma_j & \forall j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

allora  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  risolve la prima equazione del sistema LKT. Inoltre, se  $i \in \mathcal{A}(x^*)$  allora  $g_i(x^*) = 0$ , mentre se  $i \notin \mathcal{A}(x^*)$  allora  $\lambda_i^* = 0$  per definizione, quindi

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Pertanto  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  è una soluzione del sistema LKT. Dalle ipotesi segue che  $x^*$  è un minimo di  $-f$  su  $\Omega$ , quindi per il punto 1 esistono due vettori  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ , con  $\alpha \geq 0$ , e  $\beta \in \mathbb{R}^p$  tali che

$$\begin{cases} -\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \beta_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \alpha_i^* g_i(x^*) = 0 & \forall i = 1, \dots, m \\ g(x^*) \leq 0 \\ h(x^*) = 0 \end{cases}$$

Definendo  $\lambda^* = -\alpha$  e  $\mu^* = -\beta$  si ha che  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  risolve il sistema LKT.  $\square$

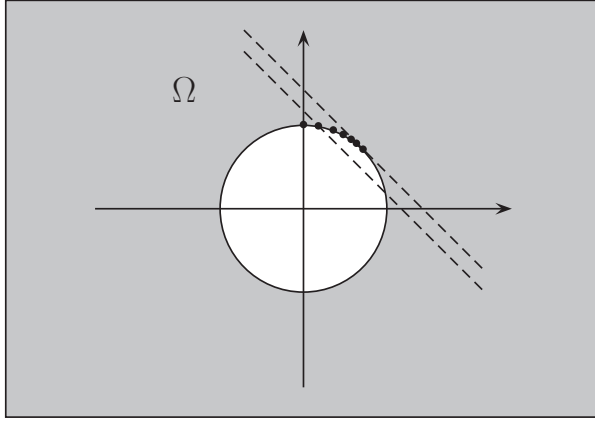
**Osservazione 17.3.1.** Il Teorema 17.3.1 fornisce solo condizioni necessarie per minimi locali, ma non sufficienti. Consideriamo infatti la funzione  $f(x) = x_1 + x_2$  e la regione

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1^2 - x_2^2 + 2 \leq 0\}.$$

L'unica soluzione del sistema LKT è  $x = (1, 1)$ ,  $\lambda = 1/2$ , tuttavia  $(1, 1)$  non è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$  perché la successione di punti

$$x_k = \left( 1 - \frac{1}{k}, \sqrt{2 - \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^2} \right),$$

appartiene ad  $\Omega$ , converge a  $(1, 1)$  e  $f(x_k) < f(1, 1)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .



□

**Definizione 17.3.1.** Se  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  è una soluzione del sistema LKT, allora  $x^*$  è chiamato punto stazionario.

**Esempio 17.3.1.** Cerchiamo il minimo della funzione  $f(x) = x_1 + x_2$  sulla regione

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0\}.$$

La funzione  $f$  è continua e  $\Omega$  è un insieme chiuso e limitato essendo un cerchio di centro  $(0, 0)$  e raggio 1, quindi esiste il minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ . Il vincolo soddisfa la condizione di Slater perché la funzione  $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$  è convessa e  $g(0, 0) < 0$ , quindi il vincolo è regolare in tutti i punti di  $\Omega$ . Risolviamo ora il sistema LKT:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Distinguiamo i casi  $\lambda = 0$  e  $\lambda > 0$ . Se  $\lambda = 0$ , allora le prime due equazioni sono impossibili. Se  $\lambda > 0$ , allora dalle prime due equazioni ricaviamo che  $x_1 = x_2 = -1/2\lambda$ . Inoltre la terza equazione implica che  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ . Quindi otteniamo  $x_1 = \pm 1$ . Per  $x_1 = 1$  abbiamo  $\lambda = -1/2$  che non è accettabile, mentre per  $x_1 = -1$  abbiamo  $\lambda = 1/2$ . Poiché l'unica soluzione del sistema LKT è  $x = (-1, -1)$ ,  $\lambda = 1/2$ , il punto  $(-1, -1)$  è il minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ . □

**Osservazione 17.3.2.** Senza l'ipotesi di regolarità dei vincoli l'enunciato del Teorema 17.3.1 non è più vero in generale. Consideriamo infatti il problema visto nell'Esempio 17.2.3. La regione  $\Omega$  è costituita dal solo punto  $x^* = (1, 0)$ , che quindi è il minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ . Tuttavia abbiamo che

$$\nabla f(x^*) = (1, 1), \quad \nabla g_1(x^*) = (0, -2), \quad \nabla g_2(x^*) = (0, 1),$$

quindi non può esistere un vettore  $\lambda^* \in \mathbb{R}^2$  tale che  $(x^*, \lambda^*)$  risolve il sistema LKT.  $\square$

**Teorema 17.3.2** (Condizione sufficiente del primo ordine).

*Supponiamo che  $f$  sia convessa, i vincoli  $g_i$  siano convessi per ogni  $i = 1, \dots, m$  ed i vincoli  $h_j$  siano lineari per ogni  $j = 1, \dots, p$ . Se  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  è una soluzione del sistema LKT, allora  $x^*$  è un minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ .*

**Dimostrazione.** Fissati  $\lambda^*$  e  $\mu^*$ , la funzione  $\mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*)$  è convessa rispetto ad  $x$  perché è somma di funzioni convesse. Inoltre  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  è una soluzione del sistema LKT, cioè  $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$ , quindi si ottiene che

$$\mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) \geq \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D'altra parte si ha che  $\mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$  e per ogni  $x \in \Omega$

$$\mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(x) \leq f(x),$$

pertanto

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall x \in \Omega,$$

cioè  $x^*$  è un minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ .  $\square$

**Esempio 17.3.2.** Applichiamo il Teorema 17.3.2 per trovare i minimi globali della funzione  $f(x) = x_1 - x_2$  sulla regione

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2^2 - 1 \leq 0 \quad x_1 + x_2^2 - 2 \leq 0\}.$$

La funzione  $f$  è lineare, quindi è convessa. I due vincoli di disuguaglianza sono convessi, quindi per il Teorema 17.3.2 ogni soluzione del sistema LKT è un minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ . Risolviamo il sistema LKT:

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 = 0 \\ \lambda_1 (-x_1 + x_2^2 - 1) = 0 \\ \lambda_2 (x_1 + x_2^2 - 2) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ -x_1 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ x_1 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Distinguiamo 4 casi diversi. Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , allora la prima equazione è impossibile. Se  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 = 0$  dalla prima equazione si ricava  $\lambda_1 = 1$  e dalla seconda  $x_2 = 1/2$ . Inoltre dalla terza equazione si trova che  $x_1 = -3/4$ . Poiché il punto  $(-3/4, 1/2)$  soddisfa i due vincoli, una soluzione del sistema LKT è  $x = (-3/4, 1/2)$ ,  $\lambda = (1, 0)$ . Se  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 > 0$ , allora dalla prima equazione si ricava  $\lambda_2 = -1$  che non è accettabile. Infine se  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$ , allora dalla terza e quarta equazione si ricava che  $2x_2^2 - 3 = 0$ , quindi  $x_2 = \pm\sqrt{6}/2$ . Dalla prima equazione troviamo  $\lambda_1 = 1 + \lambda_2$ , mentre dalla terza equazione ricaviamo  $x_1 = 1/2$ . Se  $x_2 = \sqrt{6}/2$ , allora dalla seconda equazione troviamo  $\lambda_2 = (1 - \sqrt{6})/(2\sqrt{6}) < 0$  che non è accettabile. Inoltre se  $x_2 = -\sqrt{6}/2$ , allora  $\lambda_2 = -(1 + \sqrt{6})/(2\sqrt{6}) < 0$  che non è accettabile. L'unica soluzione del sistema LKT è  $x = (-3/4, 1/2)$ ,  $\lambda = (1, 0)$ , quindi l'unico minimo globale è il punto  $(-3/4, 1/2)$ .  $\square$

**Osservazione 17.3.3.** Se non esiste il minimo globale di  $f$  su  $\mathbb{R}^n$ , vediamo che cosa si può dire dei punti che approssimano l'estremo inferiore di  $f$ . Non è vero che il gradiente in tali punti è piccolo in norma e nemmeno che essi sono vicini al minimo. Basta considerare infatti le funzioni  $f(x) = 1000x^2$  oppure  $f(x) = 0.001x^2$  rispettivamente.  $\square$

Tuttavia vale il seguente risultato.

**Teorema 17.3.3** (Principio variazionale di Ekeland).

*Supponiamo che  $f$  sia semicontinua inferiormente e limitata inferiormente. Allora per ogni  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  tale che*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \leq f(x_\varepsilon) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \varepsilon,$$

*e per ogni  $\lambda > 0$  esiste  $\bar{x}_\varepsilon$  tale che*

- $f(\bar{x}_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon)$
- $f(\bar{x}_\varepsilon) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - \bar{x}_\varepsilon\|$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$
- $\|\bar{x}_\varepsilon - x_\varepsilon\| \leq \lambda$

## 17.4 Condizioni di ottimalità del secondo ordine

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, sotto ipotesi di regolarità sui vincoli, i punti stazionari sono candidati ad essere minimi locali. Tuttavia, quando la condizione sufficiente del primo ordine non è soddisfatta, i punti stazionari non sono necessariamente minimi locali. Per analizzare tale situazione, mostriamo altre condizioni di ottimalità basate sulle derivate seconde della funzione obiettivo e dei vincoli.

**Definizione 17.4.1.** (Cono critico)

Data una soluzione  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  del sistema LKT, l'insieme

$$C(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} d^T \nabla g_i(x^*) = 0 & \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \text{ con } \lambda_i^* > 0 \\ d^T \nabla g_i(x^*) \leq 0 & \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \text{ con } \lambda_i^* = 0 \\ d^T \nabla h_j(x^*) = 0 & \forall j = 1, \dots, p \end{array} \right\}$$

è chiamato cono critico.

**Osservazione 17.4.1.** Se  $\lambda^* \geq 0$  allora il cono critico  $C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  coincide con l'insieme  $\{d \in D(x^*) : d^T \nabla f(x^*) = 0\}$ . Infatti, se  $d \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ , allora  $d \in D(x^*)$  per definizione. Inoltre dalle proprietà del sistema LKT segue che

$$d^T \nabla f(x^*) = - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* d^T \nabla g_i(x^*) - \sum_{j=1}^p \mu_j^* d^T \nabla h_j(x^*) = 0.$$

Viceversa, se  $d \in D(x^*)$  e  $d^T \nabla f(x^*) = 0$ , allora  $d^T \nabla h_j(x^*) = 0$  per ogni  $j = 1, \dots, p$  e  $d^T \nabla g_i(x^*) \leq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Inoltre dal sistema LKT ricaviamo che

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* d^T \nabla g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \text{ con } \lambda_i^* \neq 0.$$

Poiché i termini della sommatoria hanno tutti lo stesso segno, deve risultare che  $d^T \nabla g_i(x^*) = 0$  per ogni  $i \in \mathcal{A}(x^*)$  con  $\lambda_i^* > 0$ , pertanto  $d \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ .  $\square$

**Teorema 17.4.1** (Condizione necessaria del secondo ordine).

Supponiamo che  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  sia una soluzione del sistema LKT e che i gradienti dei vincoli attivi in  $x^*$  siano linearmente indipendenti. Se  $x^*$  è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$ , allora

$$d^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0 \quad \forall d \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*).$$

**Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che esista una direzione  $d \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  tale che

$$d^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d < 0.$$

Poiché  $d \in D(x^*)$ , con la stessa tecnica usata nella dimostrazione del punto 3 del Teorema 17.2.1 possiamo scegliere una successione di scalari positivi  $t_k \rightarrow 0$  ed una successione ammissibile di punti  $z_k \rightarrow x^*$  tali che

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x^*}{t_k} = d, \\ g_i(z_k) = t_k d^T \nabla g_i(x^*) & \forall i \in \mathcal{A}(x^*), \\ h_j(z_k) = t_k d^T \nabla h_j(x^*) & \forall j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Quindi otteniamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(z_k, \lambda^*, \mu^*) &= f(z_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(z_k) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(z_k) \\ &= f(z_k) + \sum_{i \in A(x^*)} \lambda_i^* t_k d^T \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* t_k d^T \nabla h_j(x^*) \\ &= f(z_k)\end{aligned}$$

D'altra parte, facendo lo sviluppo di Taylor della Lagrangiana fino al secondo ordine ricaviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(z_k, \lambda^*, \mu^*) &= \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) + (z_k - x^*)^T \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \\ &\quad + \frac{1}{2} (z_k - x^*)^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) (z_k - x^*) + o(\|z_k - x^*\|^2).\end{aligned}$$

Poiché  $\mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$  e  $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$ , risulta

$$\mathcal{L}(z_k, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*) + \frac{1}{2} (z_k - x^*)^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) (z_k - x^*) + o(\|z_k - x^*\|^2), \quad (17.3)$$

e quindi

$$f(z_k) - f(x^*) = \frac{1}{2} (z_k - x^*)^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) (z_k - x^*) + o(\|z_k - x^*\|^2).$$

Dividendo entrambi i membri per  $t_k^2$  e passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(z_k) - f(x^*)}{t_k^2} < 0,$$

ma questo è impossibile perché  $x^*$  è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$ . □

**Osservazione 17.4.2.** La condizione del Teorema 17.4.1 non è sufficiente per avere un minimo locale. Consideriamo infatti la funzione  $f(x) = x_1^3 + x_2$  e la regione  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_2 \leq 0\}$ . L'unica soluzione del sistema LKT è il punto  $x^* = (0, 0)$ ,  $\lambda^* = 1$ . Il vincolo lineare è attivo in  $x^*$  e  $\nabla g(x^*) = (0, -1) \neq 0$ . Poiché la matrice  $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$  è nulla, il punto  $x^*$  soddisfa la condizione necessaria del secondo ordine, ma  $x^*$  non è un minimo locale perché  $f(t, 0) < f(0, 0)$  per ogni  $t < 0$ . □

**Osservazione 17.4.3.** Nel caso in cui non siano presenti i vincoli  $g$  e  $h$  la condizione necessaria del secondo ordine diventa la seguente:

Se  $x^*$  è un minimo locale di  $f$ , allora  $\nabla^2 f(x^*)$  è semidefinita positiva.

Anche in questo caso tale condizione non è sufficiente per minimi locali. □

**Teorema 17.4.2** (Condizione sufficiente del secondo ordine).

Se  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  è una soluzione del sistema LKT e

$$d^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0 \quad \forall d \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*), d \neq 0.$$

allora  $x^*$  è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$ .



**Dimostrazione.** L'insieme  $\bar{C} = \{d \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*) : \|d\| = 1\}$  è chiuso e limitato, quindi la funzione quadratica

$$d \mapsto d^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d$$

assume su  $\bar{C}$  un valore minimo  $\sigma > 0$ . Poiché  $C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  è un cono, abbiamo che  $\frac{d}{\|d\|} \in \bar{C}$  per ogni  $d \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ , quindi otteniamo che

$$d^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq \sigma \|d\|^2 \quad \forall d \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*). \quad (17.4)$$

Per dimostrare che  $x^*$  è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$ , proviamo che esiste un intorno  $U$  di  $x^*$  tale che

$$f(x) \geq f(x^*) + \frac{\sigma}{4} \|x - x^*\|^2 \quad \forall x \in \Omega \cap U.$$

Supponiamo per assurdo che questo non sia vero, cioè che esista una successione  $\{z_k\} \subset \Omega$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = x^*$  e

$$f(z_k) < f(x^*) + \frac{\sigma}{4} \|z_k - x^*\|^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (17.5)$$

Allora, a meno di passare ad una sottosuccessione convergente, esiste un vettore  $v \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x^*}{\|z_k - x^*\|} = v.$$

Dalla definizione di cono tangente si ha che  $v \in T_\Omega(x^*)$ . Inoltre dalla prima parte della dimostrazione del Teorema 17.2.1 si ha che  $T_\Omega(x^*) \subseteq D(x^*)$  e quindi  $v \in D(x^*)$ . Dimostriamo ora che è impossibile sia che  $v \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ , sia che  $v \notin C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ .

Supponiamo che  $v \in C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  e quindi  $v^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) v \geq \sigma$ . Poiché  $\lambda^* \geq 0$  e la successione  $\{z_k\}$  è ammissibile si ha che

$$\mathcal{L}(z_k, \lambda^*, \mu^*) = f(z_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(z_k) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(z_k) \leq f(z_k).$$

Quindi dall'equazione (17.3) si ricava che

$$f(z_k) \geq f(x^*) + \frac{1}{2} (z_k - x^*)^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) (z_k - x^*) + o(\|z_k - x^*\|^2).$$

Utilizzando la (17.5) otteniamo che

$$\frac{\sigma}{4} \|z_k - x^*\|^2 > \frac{1}{2} (z_k - x^*)^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) (z_k - x^*) + o(\|z_k - x^*\|^2).$$

Dividendo entrambi i membri per  $\|z_k - x^*\|^2$  si ha che

$$\frac{\sigma}{4} > \frac{1}{2} \left( \frac{z_k - x^*}{\|z_k - x^*\|} \right)^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \left( \frac{z_k - x^*}{\|z_k - x^*\|} \right) + \frac{o(\|z_k - x^*\|^2)}{\|z_k - x^*\|^2}.$$

Quindi passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\frac{\sigma}{4} \geq \frac{1}{2} v^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) v \geq \frac{\sigma}{2},$$

che è impossibile perché  $\sigma > 0$ .

Supponiamo ora che  $v \notin C(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ , quindi esiste un indice  $i_0 \in \mathcal{A}(x^*)$  tale che

$$\lambda_{i_0}^* v^\top \nabla g_{i_0}(x^*) < 0. \quad (17.6)$$

Facendo lo sviluppo di Taylor al primo ordine di  $g_{i_0}$  si ha

$$\begin{aligned} \lambda_{i_0}^* g_{i_0}(z_k) &= \lambda_{i_0}^* g_{i_0}(x^*) + \lambda_{i_0}^* (z_k - x^*)^\top \nabla g_{i_0}(x^*) + o(\|z_k - x^*\|) \\ &= \lambda_{i_0}^* (z_k - x^*)^\top \nabla g_{i_0}(x^*) + o(\|z_k - x^*\|). \end{aligned}$$

e quindi ricaviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(z_k, \lambda^*, \mu^*) &= f(z_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(z_k) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* h_j(z_k) \\ &\leq f(z_k) + \lambda_{i_0}^* g_{i_0}(z_k) \\ &= f(z_k) + \lambda_{i_0}^* (z_k - x^*)^\top \nabla g_{i_0}(x^*) + o(\|z_k - x^*\|). \end{aligned}$$

Inoltre l'equazione (17.3) si può scrivere come

$$\mathcal{L}(z_k, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*) + o(\|z_k - x^*\|),$$

quindi

$$f(z_k) \geq f(x^*) - \lambda_{i_0}^* (z_k - x^*)^\top \nabla g_{i_0}(x^*) + o(\|z_k - x^*\|). \quad (17.7)$$

Dalle relazioni (17.5) e (17.7) otteniamo che

$$\frac{\sigma}{4} \|z_k - x^*\|^2 > -\lambda_{i_0}^* (z_k - x^*)^\top \nabla g_{i_0}(x^*) + o(\|z_k - x^*\|).$$

Dividendo entrambi i membri per  $\|z_k - x^*\|$  e passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  si ottiene

$$0 \geq -\lambda_{i_0}^* v^\top \nabla g_{i_0}(x^*),$$

che è impossibile perché contraddice la (17.6).

Concludendo, abbiamo dimostrato che esiste un intorno  $U$  di  $x^*$  tale che

$$f(x) \geq f(x^*) + \frac{\sigma}{4} \|x - x^*\|^2 \quad \forall x \in \Omega \cap U,$$

e quindi  $x^*$  è un minimo locale di  $f$  su  $\Omega$ . □

**Esempio 17.4.1.** Cerchiamo il minimo della funzione  $f(x) = x_1 x_2$  sulla regione  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \leq 0\}$ . La regione  $\Omega$  è limitata, quindi esiste il minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ . Il vincolo soddisfa la condizione di Slater perché la funzione  $g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2$  è convessa e  $g(0, 0) < 0$ , quindi il vincolo è regolare in tutti i punti di  $\Omega$ . Risolviamo ora il sistema LKT:

$$\begin{cases} x_2 + 2\lambda x_1 = 0 \\ x_1 + 4\lambda x_2 = 0 \\ \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 2) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Se  $\lambda = 0$ , allora dalle prime due equazioni ricaviamo che  $x_1 = x_2 = 0$ , quindi una soluzione del sistema è  $x^1 = (0, 0)$ ,  $\lambda^1 = 0$ .

Se  $\lambda > 0$ , allora moltiplicando la prima equazione per  $2x_2$ , la seconda per  $-x_1$  e sommando otteniamo  $x_1^2 = 2x_2^2$ . Dalla terza equazione ricaviamo che  $x_1^2 + 2x_2^2 - 2 = 0$  e quindi  $x_1 = \pm 1$ . Sostituendo nelle equazioni precedenti otteniamo altre due soluzioni del sistema LKT:

$$x^2 = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \lambda^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad x^3 = \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \lambda^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

I punti  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$  sono candidati ad essere minimi globali. Poiché  $f(x^1) = 0$  e  $f(x^2) = f(x^3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , i minimi globali di  $f$  su  $\Omega$  sono  $x^2$  e  $x^3$ . Rimane da esaminare il punto  $x^1$  che non è un minimo globale. Non possiamo usare la condizione sufficiente del primo ordine perché  $f$  non è convessa, essendo indefinita la matrice  $\nabla^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Passiamo alle condizioni del secondo ordine. Osserviamo che il vincolo non è attivo in  $x^1$  e che la matrice hessiana della Lagrangiana è

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 4\lambda \end{pmatrix}.$$

Poiché il vincolo non è attivo in  $x^1$ , il cono critico  $C(x^1, \lambda^1) = \mathbb{R}^2$ . La matrice  $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^1, \lambda^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  è indefinita quindi non è soddisfatta la condizione necessaria del secondo ordine, pertanto  $x^1$  non è neanche un minimo locale.  $\square$

**Esempio 17.4.2.** Cerchiamo il minimo della funzione  $f(x) = -(x_1 + 1)^2 - (x_2 + 1)^2$  sulla regione

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \quad -x_1 + x_2 - 2 \leq 0\}.$$

che non è limitata. Non esistono minimi globali di  $f$  su  $\Omega$  perché  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(0, t) = -\infty$ . I vincoli sono lineari e quindi sono regolari in tutti i punti di  $\Omega$ . Risolviamo il sistema LKT:

$$\begin{cases} -2(x_1 + 1) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -2(x_2 + 1) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ \lambda_2(-x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , allora ricaviamo la soluzione

$$x^1 = (-1, -1), \quad \lambda^1 = (0, 0).$$

Se  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 > 0$ , allora sommando le prime due equazioni otteniamo  $x_1 + x_2 + 2 = 0$ . Inoltre dalla quarta equazione si ha che  $-x_1 + x_2 - 2 = 0$ , quindi un'altra soluzione del sistema è

$$x^2 = (-2, 0), \quad \lambda^2 = (0, 2).$$

Se  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 = 0$ , allora sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo  $x_1 = x_2$ , mentre dalla terza equazione abbiamo  $x_1 + x_2 - 2 = 0$ , quindi ricaviamo la soluzione

$$x^3 = (1, 1), \quad \lambda^3 = (4, 0).$$

Infine se  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$ , allora sommando la terza e la quarta equazione abbiamo  $x_2 = 2$ , da cui ricaviamo che  $x_1 = 0$ . Sostituendo nelle prime due equazioni otteniamo la soluzione

$$x^4 = (0, 2), \quad \lambda^4 = (4, 2).$$

I punti  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  e  $x^4$  sono candidati ad essere minimi locali. Non possiamo usare la condizione sufficiente del primo ordine perché  $f$  non è convessa. Passiamo quindi alle condizioni del secondo ordine. Osserviamo che in ogni punto di  $\Omega$  i gradienti dei vincoli attivi sono linearmente indipendenti. La matrice hessiana della Lagrangiana non dipende dal punto  $(x, \lambda)$  e vale

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi è definita negativa. Nel punto  $x^1$  nessuno dei due vincoli è attivo, quindi il cono critico  $C(x^1, \lambda^1) = \mathbb{R}^2$ , pertanto la condizione necessaria del secondo ordine non è soddisfatta in  $x^1$  che quindi non è un minimo locale.

Nel punto  $x^2$  è attivo solo il secondo vincolo con  $\lambda_2^2 \neq 0$ , quindi il cono critico  $C(x^2, \lambda^2)$  è

$$C(x^2, \lambda^2) = \{d \in \mathbb{R}^2 : -d_1 + d_2 = 0\} = \{(t, t)^\top, t \in \mathbb{R}\}.$$

La condizione necessaria del secondo ordine non è soddisfatta neanche in  $x^2$ , infatti se  $d \in C(x^2, \lambda^2)$  si ha

$$d^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^2, \lambda^2) d = (t, t) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = -4t^2 < 0 \quad \text{per ogni } t \neq 0,$$

quindi  $x^2$  non è un minimo locale.

Nel punto  $x^3$  è attivo solo il primo vincolo con  $\lambda_1^3 \neq 0$ , quindi

$$C(x^3, \lambda^3) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 + d_2 = 0\} = \{(t, -t)^\top, t \in \mathbb{R}\}.$$

Anche in questo caso non è soddisfatta la condizione necessaria del secondo ordine, infatti se  $d \in C(x^3, \lambda^3)$  si ha

$$d^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^3, \lambda^3) d = (t, -t) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = -4t^2 < 0 \quad \text{per ogni } t \neq 0,$$

quindi  $x^3$  non è un minimo locale.

Nel punto  $x^4$  entrambi i vincoli sono attivi con  $\lambda_1^4 \neq 0$  e  $\lambda_2^4 \neq 0$ , quindi

$$C(x^4, \lambda^4) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 + d_2 = 0, \quad -d_1 + d_2 = 0\} = \{(0, 0)^\top\}.$$

La condizione sufficiente del secondo ordine è ovviamente soddisfatta non essendoci direzioni non nulle in  $C(x^4, \lambda^4)$ , quindi  $x^4$  è un minimo locale.  $\square$

**Esempio 17.4.3.** Cerchiamo il minimo della funzione  $f(x) = -x_1 + x_2^2$  sulla regione  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0\}$  che non è limitata. Notiamo che  $f$  non è limitata inferiormente su  $\Omega$  perché  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = -\infty$ , quindi non esiste il minimo globale di  $f$  su  $\Omega$ . Passiamo ora allo studio dei minimi locali. Il vincolo è regolare in tutti i punti di  $\Omega$  perché è soddisfatta la condizione di indipendenza lineare dei vincoli attivi. Risolviamo il sistema LKT:

$$\begin{cases} -1 - 2\lambda x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \\ \lambda(4 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ 4 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0 \end{cases}$$

Se  $\lambda = 0$  la prima equazione diventa impossibile. Se  $\lambda > 0$ , allora il sistema diventa

$$\begin{cases} -1 - 2\lambda x_1 = 0 \\ x_2(1 - \lambda) = 0 \\ 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Distinguiamo i casi  $x_2 = 0$  e  $x_2 \neq 0$ . Se  $x_2 = 0$ , allora dalla terza equazione si ha  $x_1^2 = 4$ . Se  $x_1 = 2$ , allora  $\lambda = -1/4$  che non è accettabile, mentre se  $x_1 = -2$ , allora

$$x^1 = (-2, 0), \quad \lambda^1 = \frac{1}{4}$$

è una soluzione del sistema LKT. Se  $x_2 \neq 0$ , allora dalla seconda equazione si ha  $\lambda = 1$  e troviamo altre due soluzioni:

$$x^2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \lambda^2 = 1, \quad x^3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \lambda^3 = 1.$$

I punti  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$  sono candidati ad essere minimi locali. Non possiamo usare la condizione sufficiente del primo ordine perché la funzione  $g(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2$  non è convessa. Passiamo quindi alle condizioni del secondo ordine. La matrice hessiana della Lagrangiana è

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Nel punto  $x^1$  il vincolo è attivo con  $\lambda^1 > 0$ , quindi il cono critico

$$C(x^1, \lambda^1) = \{d \in \mathbb{R}^2 : 4d_1 = 0\} = \{(0, t)^\top, t \in \mathbb{R}\}.$$

In questo caso è soddisfatta la condizione sufficiente del secondo ordine, infatti se  $d \in C(x^1, \lambda^1)$  si ha

$$d^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^1, \lambda^1) d = (0, t) \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \frac{3}{2} t^2 > 0 \quad \text{per ogni } t \neq 0,$$

quindi  $x^1$  è un minimo locale.

Il vincolo è attivo in  $x^2$  con  $\lambda^2 > 0$ , quindi

$$C(x^2, \lambda^2) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 - \sqrt{15}d_2 = 0\} = \{(\sqrt{15}t, t)^\top, t \in \mathbb{R}\}.$$

La condizione necessaria del secondo ordine non è soddisfatta, infatti se  $d \in C(x^2, \lambda^2)$  si ha

$$d^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^2, \lambda^2) d = (\sqrt{15}t, t) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{15}t \\ t \end{pmatrix} = -30t^2 < 0 \quad \text{per ogni } t \neq 0,$$

quindi  $x^2$  non è un minimo locale.

Nel punto  $x^3$  il vincolo è attivo con  $\lambda^3 > 0$ , quindi

$$C(x^3, \lambda^3) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 + \sqrt{15}d_2 = 0\} = \{(-\sqrt{15}t, t)^\top, t \in \mathbb{R}\}.$$

La condizione necessaria del secondo ordine non è soddisfatta, infatti se  $d \in C(x^3, \lambda^3)$  si ha

$$d^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^3, \lambda^3) d = (-\sqrt{15}t, t) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{15}t \\ t \end{pmatrix} = -30t^2 < 0 \quad \text{per ogni } t \neq 0,$$

quindi  $x^3$  non è un minimo locale.  $\square$

**Esempio 17.4.4.** Cerchiamo il minimo della funzione  $f(x) = x_1^3 + x_2^3$  sulla regione

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 - 1 \leq 0, \quad -x_2 - 1 \leq 0\}$$

che non è limitata. Osserviamo che  $f$  è limitata inferiormente su  $\Omega$  perché  $f(x) \geq -2$  per ogni  $x \in \Omega$ , ed inoltre  $f(-1, -1) = -2$ , quindi il punto  $(-1, -1)^\top$  è il minimo globale. Passiamo allo studio dei minimi locali. I vincoli sono lineari e quindi sono regolari in tutti i punti di  $\Omega$ . Risolviamo il sistema LKT:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - \lambda_1 = 0 \\ 3x_2^2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(-x_1 - 1) = 0 \\ \lambda_2(-x_2 - 1) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ -x_1 - 1 \leq 0 \\ -x_2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Distinguendo quattro casi in base al segno di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  otteniamo quattro soluzioni:

$$\begin{array}{llll} x^1 = (0, 0), & \lambda^1 = (0, 0) & x^2 = (0, -1), & \lambda^2 = (0, 3) \\ x^3 = (-1, 0), & \lambda^3 = (3, 0) & x^4 = (-1, -1), & \lambda^4 = (3, 3). \end{array}$$

Sappiamo già che  $x^4$  è il minimo globale, mentre  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$  sono candidati ad essere minimi locali. Non possiamo usare le condizioni sufficienti del primo ordine perché  $f$  non è convessa. Passiamo alle condizioni del secondo ordine. Osserviamo che in ogni punto i gradienti dei vincoli attivi sono linearmente indipendenti. La matrice hessiana della Lagrangiana è

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}.$$

In  $x^1$  nessuno dei due vincoli è attivo quindi  $C(x^1, \lambda^1) = \mathbb{R}^2$ . Inoltre la matrice

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^1, \lambda^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi è soddisfatta la condizione necessaria del secondo ordine, ma non quella sufficiente. In questo caso quindi non bastano le condizioni del secondo ordine per analizzare il punto  $x^1$ . Notiamo però che  $f(0, 0) = 0$  e  $f(t, 0) < 0$  per  $t < 0$  quindi  $x^1$  non è un minimo locale.

Nel punto  $x^2$  è attivo il secondo vincolo con  $\lambda_2^2 \neq 0$ , quindi

$$C(x^2, \lambda^2) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_2 = 0\} = \{(t, 0)^T, t \in \mathbb{R}\}.$$

Per ogni  $d \in C(x^2, \lambda^2)$  si ha

$$d^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^2, \lambda^2) d = (t, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = 0,$$

quindi è soddisfatta la condizione necessaria del secondo ordine, ma non quella sufficiente. Anche in questo caso le condizioni del secondo ordine non bastano per studiare il punto  $x^2$ . Osserviamo però che  $f(0, -1) = -1$  e che  $f(t, -1) < -1$  se  $t < 0$ , quindi  $x^2$  non è un minimo locale.

Nel punto  $x^3$  è attivo il primo vincolo con  $\lambda_1^3 \neq 0$ , quindi

$$C(x^3, \lambda^1) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 = 0\} = \{(0, t)^T, t \in \mathbb{R}\}.$$

Per ogni  $d \in C(x^3, \lambda^3)$  si ha

$$d^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^3, \lambda^3) d = (0, t) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = 0,$$

quindi anche in questo caso le condizioni del secondo ordine non bastano per studiare il punto  $x^3$  perché è soddisfatta la condizione necessaria, ma non quella sufficiente. Notiamo però che  $f(x^3) = -1$  e che  $f(-1, t) < -1$  se  $t < 0$ , quindi  $x^3$  non è un minimo locale.  $\square$





# Capitolo 18

## Metodi di PNL per funzioni di una variabile

### 18.1 Algoritmi

Uno degli obiettivi della PNL è quello di cercare algoritmi che trovino una soluzione locale o globale o una sua approssimazione. In realtà la maggior parte dei metodi si limita a cercare un punto che soddisfa una condizione necessaria di ottimalità, cioè una condizione che sia verificata da ogni soluzione locale. Scopo successivo è poi quello di stabilire se il punto così trovato è un minimo globale oppure un minimo locale.

Poiché gli algoritmi risolutivi per la PNL non terminano necessariamente in un numero finito di iterazioni, si introducono i cosiddetti criteri di stop. I più comuni di tali criteri, fissata una tolleranza  $\varepsilon > 0$ , sono:

- il numero delle iterazioni è pari ad un valore prefissato;
- $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$
- $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon$ ;
- una condizione di ottimalità è verificata con un errore minore di  $\varepsilon$ .

La complessità computazionale di un algoritmo è, invece, qui generalmente sostituita dal concetto di velocità di convergenza. Consideriamo una successione  $\{x_k\}$  che converge verso un punto  $x^*$ . La convergenza si dice

- lineare con velocità  $\alpha \in (0, 1)$  se esiste  $\bar{k} > 0$  tale che

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha \|x_k - x^*\| \quad \forall k > \bar{k},$$

cioè la distanza dalla soluzione  $x^*$  diminuisce ad ogni iterazione di almeno un fattore  $\alpha$ ;

- superlineare se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0;$$

- quadratica se esistono  $M > 0$  e  $\bar{k} > 0$  tali che

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq M \|x_k - x^*\|^2 \quad \forall k > \bar{k}.$$

Ad esempio, la successione  $x_k = 1/2^k$  converge linearmente a 0 con velocità  $1/2$ ; la successione  $1/k^k$  converge superlinearmente a 0; la successione  $x_k = 1/2^{2^k}$  converge a 0 in modo quadratico. Notiamo che la convergenza quadratica implica la convergenza superlineare, che a sua volta implica la convergenza lineare.

Gli algoritmi di PNL si distinguono, inoltre, in algoritmi a convergenza locale o globale a secondo che la convergenza dell'algoritmo dipenda o meno dalla scelta del punto iniziale.

Un modo per dimostrare la convergenza di alcuni metodi che vedremo in seguito fa riferimento ad un teorema di convergenza astratta basato sul concetto di multifunzione.

**Definizione 18.1.1.** Una multifunzione  $\mathcal{A}$  da  $X$  in  $Y$ , indicata con  $\mathcal{A} : X \rightrightarrows Y$ , è una funzione da  $X$  nell'insieme delle parti di  $Y$ , cioè ad ogni elemento  $x \in X$  associa un sottoinsieme  $\mathcal{A}(x)$  di  $Y$ . Essa si dice chiusa in un punto  $x \in X$  se vale la seguente implicazione:

$$\left. \begin{array}{l} x_i \rightarrow x \\ y_i \rightarrow y \\ y_i \in \mathcal{A}(x_i) \end{array} \right\} \implies y \in \mathcal{A}(x).$$

$\mathcal{A}$  si dice chiusa in  $X$  se è chiusa in ogni punto di  $X$ .

Ad esempio, la multifunzione  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $\mathcal{A}(x) = [0, x/2]$  è chiusa in  $\mathbb{R}$  perché se  $x_i \rightarrow x$ ,  $y_i \rightarrow y$  e  $0 \leq y_i \leq x_i/2$ , allora, passando al limite, si ottiene  $0 \leq y \leq x/2$ , cioè  $y \in \mathcal{A}(x)$ .

Il concetto di multifunzione è utile nella PNL perché qualunque algoritmo iterativo può essere interpretato come un'opportuna multifunzione. Infatti, un algoritmo, a partire dal punto  $x_k$ , genera il punto  $x_{k+1}$  secondo una certa procedura. Questa corrispondenza può essere vista come una multifunzione  $\mathcal{A}$  tale che  $x_{k+1} \in \mathcal{A}(x_k)$ . In seguito diremo che un algoritmo è definito dalla multifunzione  $\mathcal{A}$  se la successione  $\{x_k\}$  generata dall'algoritmo è tale che  $x_{k+1} \in \mathcal{A}(x_k)$  per ogni iterazione  $k$ .

**Definizione 18.1.2.** Dato un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}^n$ , consideriamo un algoritmo definito dalla multifunzione  $\mathcal{A} : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ . Una funzione di discesa per tale algoritmo è una funzione continua  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  per cui esiste un insieme  $S \subseteq X$  tale che

$$\text{se } x \notin S, \text{ allora } \psi(y) < \psi(x) \text{ per ogni } y \in \mathcal{A}(x)$$

**Teorema 18.1.1** (Zangwill). *Dato un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}^n$ , consideriamo un algoritmo definito dalla multifunzione  $\mathcal{A} : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ . Se*

- la successione  $\{x_k\}$  generata dall'algoritmo è limitata,
- esiste una funzione di discesa  $\psi$  per l'algoritmo,
- la multifunzione  $\mathcal{A}$  è chiusa in  $X \setminus S$  (dove  $S$  è l'insieme associato alla funzione  $\psi$ ),

allora i punti di accumulazione di  $\{x_k\}$  appartengono a  $S$ .

**Dimostrazione.** Consideriamo un qualunque punto di accumulazione  $x^*$  della successione  $\{x_k\}$  ed una sottosuccessione  $\{x_{k_p}\} \rightarrow x^*$ . Per la continuità di  $\psi$  abbiamo  $\psi(x_{k_p}) \rightarrow \psi(x^*)$ . Poiché  $\psi(x_k)$  è una successione monotona non crescente ed una sua sottosuccessione converge, allora  $\psi(x_k)$  è limitata inferiormente e quindi ammette un limite  $\ell$ . Ma allora, anche la successione  $\psi(x_{k_p}) \rightarrow \ell$ , perciò  $\ell = \psi(x^*)$ , ossia abbiamo dimostrato che  $\psi(x_k) \rightarrow \psi(x^*)$ .

Dimostriamo ora che  $x^* \in S$ . Supponiamo per assurdo che  $x^* \notin S$ . Poiché la successione  $\{x_{k_p+1}\}$  è limitata, esiste una sottosuccessione  $x_{k_{p_r}+1}$  che converge ad un punto  $x'$ . Allora si ha

$$\begin{cases} x_{k_{p_r}} \rightarrow x^* \\ x_{k_{p_r}+1} \rightarrow x' \\ x_{k_{p_r}+1} \in \mathcal{A}(x_{k_{p_r}}) \end{cases}$$

Poiché  $\mathcal{A}$  è chiusa in  $x^*$ , si ottiene  $x' \in \mathcal{A}(x^*)$  e quindi, per le proprietà di  $\psi$  si ha

$$\psi(x') < \psi(x^*). \quad (18.1)$$

Tenuto conto che  $\psi(x_k) \rightarrow \psi(x^*)$  si ottiene  $\psi(x_{k_{p_r}+1}) \rightarrow \psi(x^*)$ , ma anche, per continuità di  $\psi$ , che  $\psi(x_{k_{p_r}+1}) \rightarrow \psi(x')$  e quindi

$$\psi(x') = \psi(x^*),$$

che è assurdo perché contraddice la (18.1). Quindi deve essere  $x^* \in S$ .  $\square$

**Esempio 18.1.1.** Consideriamo un algoritmo definito dalla multifunzione  $\mathcal{A} : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$  definita come  $\mathcal{A}(x) = [0, x/2]$ . Abbiamo dimostrato in precedenza che tale multifunzione è chiusa in  $\mathbb{R}$ . La successione  $\{x_k\}$  generata dall'algoritmo è limitata perché è contenuta in  $[0, 1]$ . Inoltre  $\psi(x) = x$  è una funzione di discesa per l'algoritmo, perché è continua e ponendo l'insieme  $S = \{0\}$  si ha che:

- se  $x \neq 0$ , allora  $\mathcal{A}(x) = [0, x/2]$  e quindi  $y = \psi(y) < \psi(x) = x$  per ogni  $y \in \mathcal{A}(x)$ ;
- se  $x = 0$ , allora  $\mathcal{A}(x) = \{0\}$  e quindi  $\psi(y) = \psi(x) = 0$  per ogni  $y \in \mathcal{A}(x)$ .

Dal teorema di Zangwill segue che l'unico punto di accumulazione della successione  $\{x_k\}$  è 0. Quindi l'intera successione converge a 0.  $\square$

## 18.2 Metodi esatti

Nei metodi per minimizzare una funzione di  $n$  variabili che vedremo più avanti sarà necessario, ad ogni iterazione, trovare il minimo (esatto o approssimato) di una funzione di una sola variabile. Iniziamo con questo caso più semplice, cercando punti che minimizzano una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . In verità, come detto in precedenza, cercheremo i punti stazionari, cioè studieremo il problema  $f'(x) = 0$ .

### Metodo di bisezione

Se la derivata  $f'$  assume valori opposti agli estremi di un intervallo  $[a, b]$ , cioè  $f'(a)f'(b) < 0$ , allora  $f$  ammette almeno un punto stazionario  $x^* \in (a, b)$ . Il metodo più semplice per approssimare  $x^*$  è dividere, ad ogni iterazione, l'intervallo  $[a, b]$  a metà e stabilire in quale sottointervallo si trova sicuramente almeno una soluzione, valutando il segno di  $f'(\frac{a+b}{2})$ . L'ampiezza dell'intervallo contenente la soluzione viene, così, dimezzata ad ogni iterazione.

#### Metodo di bisezione

```

 $a_0 := a, b_0 := b, x_0 := (a + b)/2, k := 0.$ 
while  $f'(x_k) \neq 0$  do
  if  $f'(a_k)f'(x_k) < 0$  then  $a_{k+1} := a_k, b_{k+1} := x_k$ 
  else  $a_{k+1} := x_k, b_{k+1} := b_k$ 
   $x_{k+1} := (a_{k+1} + b_{k+1})/2, k := k + 1$ 

```

**Teorema 18.2.1.** *Se  $f'(a)f'(b) < 0$ , allora la successione  $\{x_k\}$  generata dal metodo di bisezione converge ad un punto stazionario di  $f$ .*

**Esempio 18.2.1.** Cerchiamo un punto stazionario della funzione  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x$ . Osserviamo che  $f'(0) = -3$  e  $f'(1) = 5$ , quindi esiste un punto stazionario di  $f$  nell'intervallo  $[0, 1]$ . Nella tabella seguente sono riportate le prime 10 iterazioni del metodo di bisezione partendo dall'intervallo  $[0, 1]$ :

| $k$ | $a_k$    | $b_k$    | $x_k$    | $f'(x_k)$ |
|-----|----------|----------|----------|-----------|
| 0   | 0.000000 | 1.000000 | 0.500000 | -0.500000 |
| 1   | 0.500000 | 1.000000 | 0.750000 | 1.687500  |
| 2   | 0.500000 | 0.750000 | 0.625000 | 0.476563  |
| 3   | 0.500000 | 0.625000 | 0.562500 | -0.038086 |
| 4   | 0.562500 | 0.625000 | 0.593750 | 0.212280  |
| 5   | 0.562500 | 0.593750 | 0.578125 | 0.085403  |
| 6   | 0.562500 | 0.578125 | 0.570313 | 0.023241  |
| 7   | 0.562500 | 0.570313 | 0.566406 | -0.007526 |
| 8   | 0.566406 | 0.570313 | 0.568359 | 0.007831  |
| 9   | 0.566406 | 0.568359 | 0.567383 | 0.000146  |
| 10  | 0.566406 | 0.567383 | 0.566895 | -0.003692 |

Continuando ad applicare il metodo dopo la decima iterazione, si nota che la successione converge verso il punto  $x^* \simeq 0.56736$ . Osserviamo che la funzione  $f$  è convessa su  $\mathbb{R}$  poiché la sua derivata seconda  $f''(x) = 12x^2 + 4 > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , pertanto il punto stazionario  $x^*$  è anche un minimo globale di  $f$  su  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Osservazione 18.2.1.** Come criterio di arresto si può scegliere che l'ampiezza dell'intervallo  $[a_k, b_k]$  (pari all'errore assoluto con cui conosciamo la soluzione) sia sufficientemente piccola, cioè  $b_k - a_k < \varepsilon$ , dove  $\varepsilon > 0$  è fissato. Poiché si ha  $b_k - a_k = (b - a)/2^k$ , la soluzione  $x^*$  è approssimata da  $x_k$  con un errore assoluto minore di  $\varepsilon$  se  $k > \log_2(\frac{b-a}{\varepsilon})$ .  $\square$

## Metodo di Newton

Alla  $k$ -esima iterazione si costruisce un'approssimazione lineare di  $f'$  in un intorno di  $x_k$ , cioè

$$f'(x) \simeq f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k).$$

Se  $f''(x_k) \neq 0$  allora  $x_{k+1}$  è il punto in cui si annulla tale approssimazione, cioè:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}. \quad (18.2)$$

Tale metodo è anche detto metodo delle tangenti, perché ad ogni iterazione si trova l'intersezione con l'asse delle ascisse della tangente al grafico di  $f'$  nel punto  $(x_k, f'(x_k))$  (vedi Figura 18.1).

Osserviamo che un'approssimazione lineare della derivata  $f'$  in un intorno di  $x_k$  equivale ad un'approssimazione quadratica di  $f$  nello stesso intorno, ossia:

$$f(x) \simeq f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2.$$

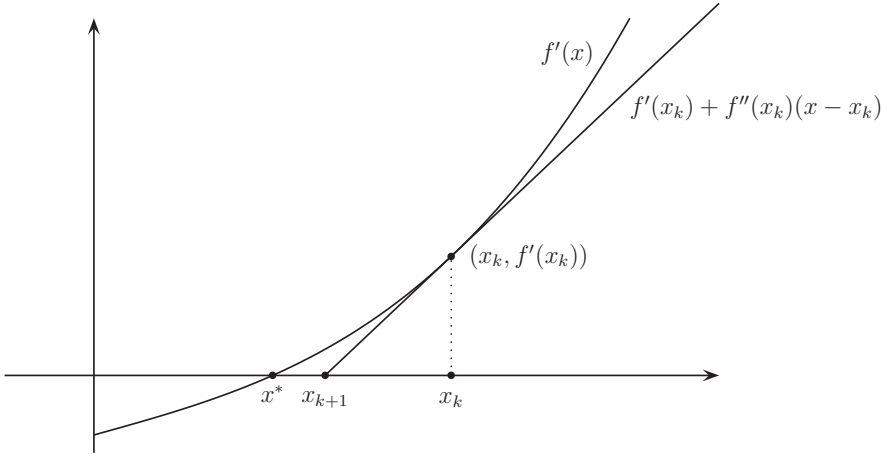


Figura 18.1: metodo di Newton.

Se  $f''(x_k) \neq 0$ , allora il punto  $x_{k+1}$  dato dalla relazione (18.2) è il punto stazionario della approssimazione quadratica di  $f$  in  $x_k$ .

#### Metodo di Newton

Scegli  $x_0 \in \mathbb{R}$  e poni  $k := 0$

**while**  $f'(x_k) \neq 0$  **do**

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k := k + 1$$

Dimostriamo che il metodo di Newton converge in modo quadratico, ma solo localmente.

**Teorema 18.2.2.** *Se  $f'(x^*) = 0$  e  $f''(x^*) \neq 0$ , allora esiste un intorno  $U$  di  $x^*$  tale che per ogni scelta di  $x_0$  in  $U$  la successione  $\{x_k\}$  generata dal metodo di Newton converge a  $x^*$  e la convergenza è quadratica.*

**Dimostrazione.** Consideriamo la funzione

$$h(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

che è definita in un intorno di  $x^*$  perché  $f''(x^*) \neq 0$ . Osserviamo che

$$h'(x^*) = \frac{f'(x^*)f'''(x^*)}{[f''(x^*)]^2} = 0,$$

## 18.2 METODI ESATTI

quindi esiste un intorno  $U$  di  $x^*$  tale che

$$|h'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in U.$$

Comunque venga scelto un punto iniziale  $x_0 \in U$ , abbiamo:

$$|x_1 - x^*| = |h(x_0) - h(x^*)| = |h'(\xi)(x_0 - x^*)| \leq \frac{1}{2}|x_0 - x^*|,$$

pertanto la successione  $\{x_k\}$  ottenuta è contenuta in  $U$  e

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{2^k}|x_0 - x^*|,$$

quindi  $x_k \rightarrow x^*$ . Inoltre, per definizione, si ha

$$f''(x_k)(x_{k+1} - x^*) = f''(x_k)(x_k - x^*) - f'(x_k),$$

e per la formula di Taylor

$$0 = f'(x^*) = f'(x_k) + f''(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 f'''(\xi^k),$$

dove  $|\xi^k - x^*| < |x_k - x^*|$ . Perciò,

$$f''(x_k)(x_{k+1} - x^*) = \frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 f'''(\xi^k),$$

da cui si ottiene

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{f'''(\xi^k)}{2f''(x_k)},$$

passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{f'''(x^*)}{2f''(x^*)}.$$

Quindi, la convergenza del metodo è quadratica. □

**Esempio 18.2.2.** Consideriamo la funzione  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x$  vista nell'Esempio 18.2.1. Per trovare un punto stazionario di  $f$ , applichiamo il metodo di Newton partendo dal punto  $x_0 = 1$ . In tabella sono riportate le prime 4 iterazioni del metodo:

| $k$ | $x_k$    | $f'(x_k)$ |
|-----|----------|-----------|
| 0   | 1.000000 | 5.000000  |
| 1   | 0.687500 | 1.049805  |
| 2   | 0.578958 | 0.092081  |
| 3   | 0.567480 | 0.000909  |
| 4   | 0.567364 | 0.000000  |

□

**Osservazione 18.2.2.** Il metodo di Newton può essere costoso dal punto di vista computazionale, perché ad ogni passo è necessario calcolare sia la derivata prima che la derivata seconda di  $f$ . Inoltre, esso è solo localmente convergente. Consideriamo infatti la funzione  $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{5}{8}x^2$ . Se scegliamo come punto iniziale  $x_0 = 1$ , otteniamo  $x_1 = -1$ , ma di nuovo  $x_2 = 1$ . La successione oscilla quindi tra 1 e  $-1$  senza convergere al punto stazionario  $x^* = 0$ . □

### 18.3 Metodi inesatti

Nonostante, come appena visto, esistano metodi che cercano minimi di funzioni di una variabile, la minimizzazione di una funzione di una variabile è comunque un problema non banale dal punto di vista computazionale e molto spesso non si può risolvere esattamente. Per ovviare a tali inconvenienti sono state proposte molte varianti, chiamate in letteratura, metodi con ricerca inesatta. In questo paragrafo supponiamo che  $f$  sia limitata inferiormente e che  $f'(0) < 0$ .

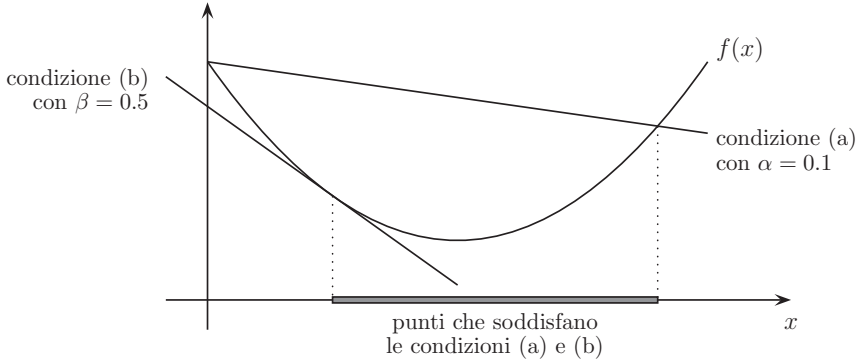
#### Condizioni di Armijo–Goldstein–Wolfe

Una classe importante di metodi di ricerca inesatta è data da quelli in cui si cerca un punto  $x > 0$  che soddisfi le cosiddette condizioni di Armijo–Goldstein–Wolfe:

$$\begin{aligned} (a) \quad & f(x) \leq f(0) + \alpha f'(0) x \\ (b) \quad & f'(x) \geq \beta f'(0), \end{aligned}$$

dove  $0 < \alpha < \beta < 1$  sono due parametri prefissati dell'algoritmo. La condizione (a) garantisce che  $x$  non sia troppo grande: in tal caso, infatti, il membro destro tenderebbe a  $-\infty$  e quindi (a) non potrebbe essere soddisfatta. Viceversa, la condizione (b) garantisce che  $x$  non sia troppo piccolo: in tal caso infatti si avrebbe  $f'(x) \simeq f'(0)$  e la condizione (b) non potrebbe sussistere.





Il seguente risultato garantisce che esiste un intervallo in cui sono soddisfatte le condizioni di Armijo–Goldstein–Wolfe.

**Teorema 18.3.1.** *Se  $f$  è limitata inferiormente e  $f'(0) < 0$ , allora esiste un intervallo  $(a, b)$  tale che le condizioni di Armijo–Goldstein–Wolfe sono soddisfatte per ogni  $x \in (a, b)$ .*

**Dimostrazione.** Poiché  $0 < \alpha < 1$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

$$f(x) - f(0) < \alpha f'(0)x \quad \forall x \in (0, \varepsilon). \quad (18.3)$$

Osserviamo che  $\varepsilon \neq +\infty$  perché  $f$  è limitata inferiormente. Inoltre se poniamo

$$\bar{\varepsilon} = \sup\{\varepsilon : \varepsilon \text{ soddisfa la relazione (18.3)}\},$$

allora si ha che

$$f(\bar{\varepsilon}) - f(0) = \alpha f'(0) \bar{\varepsilon},$$

per la continuità della funzione  $f$ . Applicando il teorema del valor medio otteniamo che esiste  $x \in (0, \bar{\varepsilon})$  tale che

$$f(\bar{\varepsilon}) - f(0) = f'(x) \bar{\varepsilon},$$

e quindi

$$f'(x) = \alpha f'(0).$$

Inoltre poiché  $\alpha < \beta$  e  $f'(0) < 0$  si ha

$$f'(x) = \alpha f'(0) > \beta f'(0).$$

Ma inoltre, essendo  $x < \bar{\varepsilon}$  si ha che

$$f(x) - f(0) < \alpha f'(0)x.$$

Le ultime due disequazioni sono esattamente le condizioni (a) e (b) e, se valgono in  $x$ , per la continuità di  $f$  e  $f'$ , valgono anche in un intorno  $(a, b)$  di  $x$ .  $\square$

Nel caso in cui  $f$  sia convessa, si può dimostrare che la regola (a) è verificata in un intervallo del tipo  $(0, s)$ , mentre la regola (b) è verificata in una semiretta  $(r, +\infty)$  con  $r < s$ . Per determinare effettivamente un punto in cui siano soddisfatte entrambe le condizioni si può partire da un punto  $x_0 > 0$  e procedere per ricerche binarie successive, spostandosi a sinistra o a destra a seconda che la regola violata sia rispettivamente la (a) o la (b).

### Metodo *backtracking*

Un altro metodo di ricerca inesatta utilizza una tecnica di tipo *backtracking*: si parte con un valore  $x = \bar{x} > 0$  e, finché la condizione (a) di Armijo–Goldstein–Wolfe non è soddisfatta, si moltiplica  $x$  per un fattore  $\gamma \in (0, 1)$ . Questa procedura garantisce che il punto trovato soddisfi la condizione di discesa per  $f$ , ma assicura anche che il passo non sia troppo piccolo.

#### Metodo *backtracking*

1. Fissa  $\alpha, \gamma \in (0, 1)$  e  $\bar{x} > 0$ .

2. Calcola il più piccolo numero naturale  $m$  tale che

$$f(\gamma^m \bar{x}) \leq f(0) + \alpha f'(0) \gamma^m \bar{x}.$$

3. Poni  $x := \gamma^m \bar{x}$

**Esempio 18.3.1.** Consideriamo ancora una volta la funzione  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x$  dell'Esempio 18.2.1. Scegliamo i parametri  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $\gamma = 0.5$  e  $\bar{x} = 1$ . Per  $m = 0$  si ha

$$f(\bar{x}) = 0 > f(0) + \alpha f'(0) \bar{x} = -0.0003,$$

cioè la condizione non è ancora soddisfatta. Per  $m = 1$  si ha

$$f(0.5 \bar{x}) = -0.9375 < f(0) + \alpha f'(0) 0.5 \bar{x} = -0.00015,$$

perciò la condizione è soddisfatta e si ottiene  $x = 0.5$ . □

## Capitolo 19

# Metodi di PNL per funzioni di più variabili

In questo capitolo vedremo alcuni metodi iterativi per trovare un punto stazionario di un problema di PNL. Prima tratteremo problemi non vincolati (nei paragrafi 19.1, 19.2 e 19.3) e poi vincolati (nei paragrafi 19.4 e 19.5).

Supponiamo di partire da un punto ammissibile  $x_k$  e consideriamo la restrizione della funzione  $f$  ad una semiretta di direzione  $d_k$  uscente dal punto  $x_k$ :

$$\varphi(t) = f(x_k + t d_k), \quad \text{con } t \geq 0.$$

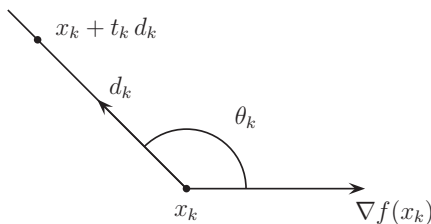
La direzione  $d_k$  si dice di discesa per  $f$  nel punto  $x_k$  se

$$\varphi'(0) < 0, \tag{19.1}$$

ossia se la restrizione  $\varphi$  è decrescente in un opportuno intervallo  $[0, a]$ , con  $a > 0$ . Poiché si ha

$$\varphi'(0) = d_k^T \nabla f(x_k) = \|\nabla f(x_k)\| \|d_k\| \cos \theta_k,$$

dove  $\theta_k$  è l'angolo formato dai vettori  $\nabla f(x_k)$  e  $d_k$ , la condizione (19.1) equivale a dire che l'angolo  $\theta_k$  è maggiore di un angolo retto.



I metodi che vedremo in seguito costruiscono successioni del tipo

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k,$$

dove  $d_k$  è una direzione di discesa per  $f$  in  $x_k$ , mentre  $t_k$  è il cosiddetto passo che può essere ottenuto minimizzando la restrizione  $\varphi$  con uno dei metodi (esatti o inesatti) per funzioni di una variabile visti nel capitolo 18. Notiamo che dalla scelta della direzione e del passo segue che  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$  per ogni iterazione  $k$ , cioè la successione dei valori  $\{f(x_k)\}$  è decrescente.

## 19.1 Metodo del gradiente

Il metodo del gradiente si applica per trovare un punto stazionario di un problema di PNL non vincolato. Come direzione di ricerca si sceglie quella opposta al gradiente, ossia  $d_k = -\nabla f(x_k)$ . Tale direzione è detta direzione di massima discesa (oppure direzione di discesa più ripida) nel punto  $x_k$  perché è la direzione che minimizza il valore  $\varphi'(0)$ : infatti per una generica direzione  $d$  con  $\|d\| = 1$  si ha che

$$\varphi'(0) = d^T \nabla f(x_k) = \|\nabla f(x_k)\| \cos \theta_k,$$

dove  $\theta_k$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\nabla f(x_k)$  e  $d$ . Quindi  $\varphi'(0)$  è minimo quando  $\cos \theta_k = -1$ , cioè quando la direzione  $d$  è opposta a  $\nabla f(x_k)$ .

Il passo  $t_k$  può essere scelto effettuando una ricerca monodimensionale esatta o inesatta usando i metodi visti nel capitolo 18. Nel caso in cui si utilizzi una ricerca esatta, il passo  $t_k$  è una soluzione del problema

$$\min_{t>0} f(x_k - t \nabla f(x_k)). \quad (19.2)$$

### Metodo del gradiente (con ricerca esatta del passo)

Scegli  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e poni  $k := 0$

**while**  $\nabla f(x_k) \neq 0$  **do**

    Calcola una soluzione  $t_k$  del problema

$$\min_{t>0} f(x_k - t \nabla f(x_k)).$$

$x_{k+1} := x_k - t_k \nabla f(x_k)$ ,  $k := k + 1$

**Teorema 19.1.1.** *Se  $f$  è coerciva allora, comunque si sceglie il punto iniziale  $x_0$ , il metodo del gradiente con ricerca esatta del passo o trova un punto stazionario di  $f$  dopo un numero finito di iterazioni, oppure genera una successione limitata  $\{x_k\}$  tale che ogni suo punto di accumulazione è un punto stazionario di  $f$ .*

**Dimostrazione.** Se il metodo si ferma dopo un numero finito di iterazioni, allora, per il criterio di arresto, trova un punto stazionario. Supponiamo ora che venga generata una successione  $\{x_k\}$  e dimostriamo la convergenza del metodo sfruttando il teorema 18.1.1 di Zangwill. Il metodo è definito dalla multifunzione  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  definita come:

$$\mathcal{A}(x) = \left\{ y = x - t \nabla f(x), \text{ dove } t \text{ è una soluzione del problema } \min_{s>0} f(x - s \nabla f(x)) \right\}.$$

- La successione  $\{x_k\}$  è limitata: poiché  $f$  è coerciva, l'insieme  $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$  è limitato; inoltre ad ogni iterazione si ha  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ , quindi l'intera successione è contenuta in  $\mathcal{L}$  e pertanto è limitata.
- La funzione  $f$  è di discesa:  $f$  è continua e, se chiamiamo  $S$  l'insieme dei punti stazionari di  $f$ , si ha che:

$$\text{se } x \notin S, \text{ allora } f(y) < f(x) \text{ per ogni } y \in \mathcal{A}(x).$$

- La multifunzione  $\mathcal{A}$  è chiusa in  $\mathbb{R}^n \setminus S$ : consideriamo un punto  $\bar{x} \notin S$  e supponiamo che  $x_i \rightarrow \bar{x}$ ,  $y_i \rightarrow \bar{y}$  e  $y_i \in \mathcal{A}(x_i)$ . Quindi si ha

$$y_i = x_i - t_i \nabla f(x_i) \tag{19.3}$$

e

$$f(x_i - t_i \nabla f(x_i)) \leq f(x_i - s \nabla f(x_i)) \quad \forall s > 0. \tag{19.4}$$

Inoltre ogni passo  $t_i = \|x_i - y_i\| / \|\nabla f(x_i)\|$  e pertanto tale successione converge al valore  $\|\bar{x} - \bar{y}\| / \|\nabla f(\bar{x})\| = \bar{t}$ . Passando al limite in (19.3) si ottiene  $\bar{y} = \bar{x} - \bar{t} \nabla f(\bar{x})$ . Inoltre, per ogni fissato  $s > 0$ , passando al limite in (19.4) si ottiene

$$f(\bar{x} - \bar{t} \nabla f(\bar{x})) \leq f(\bar{x} - s \nabla f(\bar{x})),$$

Pertanto abbiamo dimostrato che  $\bar{y} \in \mathcal{A}(\bar{x})$  e quindi  $\mathcal{A}$  è chiusa in  $\bar{x}$ .

Dal teorema di Zangwill segue che i punti di accumulazione della successione  $\{x_k\}$  appartengono all'insieme  $S$ , cioè sono punti stazionari di  $f$ .  $\square$

**Esempio 19.1.1.** Applichiamo il metodo del gradiente con ricerca esatta del passo alla funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$  partendo dal punto  $x_0 = (2, 1)$ . Il gradiente di  $f$  è  $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 - 3, 4x_2 - 2)$ , quindi  $\nabla f(x_0) = (1, 2)$ . Per trovare il passo occorre trovare il minimo su  $t > 0$  della funzione

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f((2, 1) - t(1, 2)) \\ &= f(2 - t, 1 - 2t) \\ &= (2 - t)^2 + 2(1 - 2t)^2 - 3(2 - t) - 2(1 - 2t) \\ &= 9t^2 - 5t - 2. \end{aligned}$$

Poiché  $\varphi$  è una funzione convessa, basta calcolare il valore di  $t$  che annulla la sua derivata:

$$\varphi'(t) = 18t - 5 = 0 \quad \text{per } t_0 = \frac{5}{18}.$$

Quindi il punto successivo a  $x_0$  risulta essere

$$x_1 = (2, 1) - \frac{5}{18}(1, 2) = \left(\frac{31}{18}, \frac{4}{9}\right).$$

□

**Osservazione 19.1.1.** Il passo  $t_k$  si può calcolare facilmente nel caso in cui  $f$  sia una funzione quadratica del tipo

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x, \quad \text{dove } Q \text{ è simmetrica e definita positiva.} \quad (19.5)$$

In tal caso la restrizione

$$\varphi(t) = f(x_k - t\nabla f(x_k)) = \frac{1}{2} g_k^\top Q g_k t^2 - g_k^\top g_k t + f(x_k),$$

dove  $g_k = \nabla f(x_k) = Q x_k + c$ . Tale restrizione è una funzione quadratica convessa di una sola variabile, di cui si può calcolare facilmente il minimo che è

$$t_k = \frac{g_k^\top g_k}{g_k^\top Q g_k}.$$

Quindi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g_k^\top g_k}{g_k^\top Q g_k} g_k. \quad (19.6)$$

□

**Osservazione 19.1.2.** Gli svantaggi di questo metodo sono costituiti sia dalla difficoltà della ricerca esatta (bisogna trovare ad ogni iterazione un minimo di una funzione anche se di una sola variabile), sia dal suo comportamento a zig-zag dovuto al fatto che due direzioni successive sono tra loro ortogonali. Infatti, poiché  $\varphi(t) = f(x_k - t\nabla f(x_k))$  dal teorema del differenziale della funzione composta si ottiene

$$0 = \varphi'(t_k) = -\nabla f(x_{k+1})^\top \nabla f(x_k).$$

Per quanto riguarda la velocità di convergenza, si può dimostrare che nel caso in cui  $f$  sia quadratica della forma (19.5) la convergenza è lineare:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_Q \leq \left( \frac{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} + 1} \right) \|x_k - x^*\|_Q, \quad (19.7)$$

dove  $\|x\|_Q = \sqrt{x^\top Q x}$  è la norma indotta dalla matrice  $Q$  e  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  sono gli autovalori di  $Q$ . Da questo risultato segue che la convergenza è ottenuta in una sola

iterazione se tutti gli autovalori di  $Q$  sono uguali, ossia gli insiemi di livello della funzione  $f$  sono sfere aventi per centro il minimo  $x^*$ . Più in generale, quando cresce il numero di condizionamento  $\lambda_n/\lambda_1$  della matrice  $Q$ , gli insiemi di livello di  $f$  diventano più “allungati”, si accentua il comportamento a zig-zag della successione e dalla relazione (19.7) si deduce che la convergenza può essere molto lenta (vedi l'esempio seguente).  $\square$

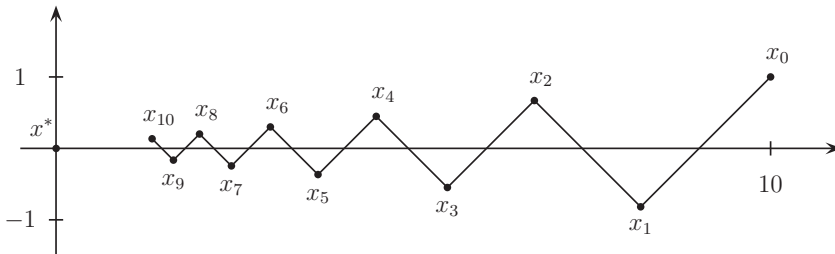
**Esempio 19.1.2.** Consideriamo la funzione quadratica  $f(x) = x_1^2 + 10x_2^2$  che ammette il minimo globale nel punto  $x^* = (0, 0)$ . In questo caso la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$  ha gli autovalori  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 20$ . Applicando il metodo del gradiente con ricerca esatta del passo a partire dal punto  $x_0 = (10, 1)$ , ed usando iterativamente la formula (19.6), si può dimostrare che:

$$x_k = \left( 10 \left( \frac{9}{11} \right)^k, \left( \frac{-9}{11} \right)^k \right), \quad \forall k \geq 0.$$

Quindi

$$\|x_{k+1} - x^*\| = \frac{9}{11} \|x_k - x^*\| \quad \forall k \geq 0,$$

ossia la distanza della successione dal minimo globale  $x^*$  si riduce ad ogni iterazione di un fattore  $9/11$ . Le prime 10 iterazioni del metodo sono rappresentate nella figura seguente in cui si notano il comportamento a zig-zag e la lentezza della convergenza.



$\square$

Vediamo ora una versione inesatta del metodo del gradiente, in cui ad ogni iterazione il passo  $t_k$  è ottenuto applicando il metodo *backtracking* alla restrizione  $\varphi(t) = f(x_k - t \nabla f(x_k))$ .

Metodo del gradiente (con ricerca *backtracking* del passo)

Fissa  $\alpha, \gamma \in (0, 1)$  e  $\bar{t} > 0$ . Scegli  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e poni  $k := 0$

**while**  $\nabla f(x_k) \neq 0$  **do**

Calcola il più piccolo numero naturale  $m$  tale che

$$f(x_k - \gamma^m \bar{t} \nabla f(x_k)) \leq f(x_k) - \alpha \gamma^m \bar{t} \|\nabla f(x_k)\|^2,$$

$$t_k := \gamma^m \bar{t}.$$

$$x_{k+1} := x_k - t_k \nabla f(x_k), \quad k := k + 1$$

**Teorema 19.1.2.** *Se  $f$  è coerciva allora, comunque si sceglie il punto iniziale  $x_0$ , il metodo del gradiente con ricerca *backtracking* del passo o trova un punto stazionario di  $f$  dopo un numero finito di iterazioni, oppure genera una successione limitata  $\{x_k\}$  tale che ogni suo punto di accumulazione è un punto stazionario di  $f$ .*

**Dimostrazione.** Se il metodo si ferma dopo un numero finito di iterazioni, allora trova un punto stazionario di  $f$ . Se il metodo genera una successione  $\{x_k\}$ , allora la successione  $\{f(x_k)\}$  è decrescente. Poiché  $f$  è coerciva, si ricava che  $\{x_k\}$  è limitata e che  $f$  è limitata inferiormente e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_k) - f(x_{k+1})] = 0. \quad (19.8)$$

Consideriamo ora un generico punto di accumulazione  $x^*$  di  $\{x_k\}$  e sia  $\{x_\ell\}$  una sottosuccessione che converge a  $x^*$ . Consideriamo due possibili casi: o  $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell > 0$  oppure  $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = 0$ .

Se  $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell > 0$ , allora esistono  $t^* > 0$  ed una sottosuccessione  $\{t_{\ell_p}\}$  tale che  $t_{\ell_p} \geq t^*$ . Allora per la scelta del passo si ha

$$f(x_{\ell_p}) - f(x_{\ell_p+1}) \geq \alpha t_{\ell_p} \|\nabla f(x_{\ell_p})\|^2 \geq \alpha t^* \|\nabla f(x_{\ell_p})\|^2,$$

quindi per la (19.8) otteniamo  $\lim_{p \rightarrow \infty} \nabla f(x_{\ell_p}) = 0$ . D'altra parte, dalla continuità del gradiente otteniamo  $\lim_{p \rightarrow \infty} \nabla f(x_{\ell_p}) = \nabla f(x^*)$  e quindi  $x^*$  è un punto stazionario.

Supponiamo ora che  $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = 0$ , cioè  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = 0$ . Per la scelta del passo abbiamo che

$$f(x_\ell) - f\left(x_\ell - \frac{t_\ell}{\gamma} \nabla f(x_\ell)\right) < \alpha \frac{t_\ell}{\gamma} \|\nabla f(x_\ell)\|^2.$$

D'altra parte, per il teorema del valor medio, esiste  $\delta_\ell \in (0, 1)$  tale che

$$f(x_\ell) - f\left(x_\ell - \frac{t_\ell}{\gamma} \nabla f(x_\ell)\right) = \frac{t_\ell}{\gamma} \nabla f\left(x_\ell - \delta_\ell \frac{t_\ell}{\gamma} \nabla f(x_\ell)\right)^\top \nabla f(x_\ell).$$

Pertanto abbiamo

$$\nabla f\left(x_\ell - \delta_\ell \frac{t_\ell}{\gamma} \nabla f(x_\ell)\right)^\top \nabla f(x_\ell) < \alpha \|\nabla f(x_\ell)\|^2.$$

Allora, passando al limite per  $\ell \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\|\nabla f(x^*)\|^2 \leq \alpha \|\nabla f(x^*)\|^2,$$



e poiché  $\alpha < 1$  otteniamo che  $x^*$  è stazionario.  $\square$

**Esempio 19.1.3.** Applichiamo il metodo del gradiente con ricerca *backtracking* del passo alla funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1^2 + x_2^2$  a partire dal punto  $x_0 = (1, 1)$ . La direzione di discesa è  $-\nabla f(x_0) = (-6, -2)$ . Scegliamo i parametri  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $\gamma = 0.5$  e  $\bar{t} = 1$ . Partiamo con  $m = 0$ : poiché

$$f(x_0 - \nabla f(x_0)) = 651 > f(x_0) - \alpha \|\nabla f(x_0)\|^2 = 2.996,$$

la condizione non è soddisfatta. Poniamo  $m = 1$ : anche questa volta si ha

$$f(x_0 - \gamma \nabla f(x_0)) = 20 > f(x_0) - \alpha \|\nabla f(x_0)\|^2 \gamma = 2.998,$$

quindi aumentiamo ancora l'esponente che diventa  $m = 2$ . Infine abbiamo:

$$f(x_0 - \gamma^2 \nabla f(x_0)) = 0.5625 < f(x_0) - \alpha \|\nabla f(x_0)\|^2 \gamma^2 = 2.999$$

perciò il passo è  $t_0 = \gamma^2 = 1/4$  ed il nuovo punto è

$$x_0 - t_0 \nabla f(x_0) = (1, 1) + \frac{1}{4}(-6, -2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$\square$

**Osservazione 19.1.3.** Un'altra versione inesatta del metodo del gradiente è ottenuta applicando, ad ogni iterazione, le condizioni di Armijo–Goldstein–Wolfe alla restrizione  $\varphi(t) = f(x_k - t\nabla f(x_k))$ , ossia si cerca un passo  $t_k$  soddisfi le relazioni

$$\begin{aligned} (a) \quad & \varphi(t_k) \leq \varphi(0) + \alpha \varphi'(0) t_k, \\ (b) \quad & \varphi'(t_k) \geq \beta \varphi'(0), \end{aligned}$$

che equivalgono alle seguenti:

$$\begin{aligned} (a) \quad & f(x_k - t_k \nabla f(x_k)) \leq f(x_k) - \alpha \|\nabla f(x_k)\|^2 t_k, \\ (b) \quad & -\nabla f(x_k - t_k \nabla f(x_k))^T \nabla f(x_k) \geq -\beta \|\nabla f(x_k)\|^2. \end{aligned} \tag{19.9}$$

Con questa scelta del passo si può dimostrare che vale lo stesso risultato di convergenza del teorema 19.1.2.  $\square$

## 19.2 Metodo del gradiente coniugato

Anche il metodo del gradiente coniugato si applica per trovare un punto stazionario di un problema non vincolato. Tale metodo è una modifica del metodo del gradiente, in cui la scelta della direzione  $d_k$  tiene conto anche delle direzioni calcolate alle iterazioni precedenti. Illustriamo il metodo prima nel caso di funzioni quadratiche e poi per funzioni più generali.

Supponiamo che  $f$  sia una funzione quadratica del tipo

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x, \quad \text{dove } Q \text{ è simmetrica e definita positiva.} \quad (19.10)$$

In tal caso esiste un unico minimo globale di  $f$  che coincide con il punto stazionario  $x^* = -Q^{-1}c$ . In seguito indicheremo per comodità il gradiente di  $f$  con il vettore  $g = Qx + c$ . Nel metodo del gradiente coniugato la direzione  $d_k$  è scelta nel modo seguente:

$$d_k = \begin{cases} -g_0 & \text{se } k = 0, \\ -g_k + \beta_k d_{k-1} & \text{se } k \geq 1, \end{cases} \quad (19.11)$$

ossia all'iterazione iniziale la direzione è opposta al gradiente di  $f$  (come nel metodo del gradiente), mentre nelle iterazioni successive è una combinazione lineare del vettore opposto al gradiente di  $f$  e della direzione calcolata all'iterazione precedente. Il parametro  $\beta_k$  viene scelto in modo che le direzioni  $d_k$  e  $d_{k-1}$  siano *coniugate* rispetto alla matrice  $Q$ , ossia

$$d_k^T Q d_{k-1} = 0. \quad (19.12)$$

Sostituendo nella (19.12) l'espressione di  $d_k$  si ricava che

$$\beta_k = \frac{g_k^T Q d_{k-1}}{d_{k-1}^T Q d_{k-1}} \quad \text{per } k \geq 1. \quad (19.13)$$

Se ad ogni iterazione viene fatta una ricerca esatta del passo, allora la direzione così scelta è di discesa per  $f$ . Infatti, se consideriamo la restrizione  $\varphi(t) = f(x_{k-1} + t d_{k-1})$ , si ha

$$\varphi'(t_{k-1}) = g_k^T d_{k-1} = 0, \quad (19.14)$$

quindi

$$\nabla f(x_k)^T d_k = g_k^T d_k = -\|g_k\|^2 + \beta_k g_k^T d_{k-1} = -\|g_k\|^2 < 0. \quad (19.15)$$

Inoltre possiamo calcolare facilmente il passo  $t_k$ . Infatti la restrizione di  $f$  alla semiretta di direzione  $d_k$  uscente da  $x_k$  è una funzione quadratica convessa nella variabile  $t$ :

$$f(x_k + t d_k) = \frac{1}{2} d_k^T Q d_k t^2 + g_k^T d_k t + f(x_k),$$

quindi si ottiene il passo

$$t_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}. \quad (19.16)$$

## Metodo del gradiente coniugato (per funzioni quadratiche)

Scegli un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , poni  $g_0 = Q x_0 + c$ ,  $k := 0$   
**while**  $g_k \neq 0$  **do**  
  **if**  $k = 0$  **then**  $d_k := -g_k$   
  **else**  $\beta_k := \frac{g_k^\top Q d_{k-1}}{d_{k-1}^\top Q d_{k-1}}$ ,  $d_k := -g_k + \beta_k d_{k-1}$ .  
   $t_k := -\frac{g_k^\top d_k}{d_k^\top Q d_k}$   
   $x_{k+1} := x_k + t_k d_k$ ,  $g_{k+1} = Q x_{k+1} + c$ ,  $k := k + 1$

**Teorema 19.2.1.** *Se  $f$  è del tipo (19.10), allora il metodo del gradiente coniugato trova il minimo globale di  $f$  dopo al più  $n$  iterazioni.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo la seguente proprietà: se alla  $k$ -esima iterazione il metodo non ha ancora trovato la soluzione  $x^*$ , allora

$$g_k^\top g_i = 0 \quad \forall i = 0, \dots, k-1 \quad (19.17)$$

cioè i vettori  $\{g_0, g_1, \dots, g_k\}$  sono ortogonali tra loro. Da questa proprietà segue che il metodo deve trovare la soluzione  $x^*$  dopo al più  $n$  iterazioni, altrimenti alla  $n+1$ -esima iterazione ci sarebbero  $n+1$  vettori ortogonali  $g_0, g_1, g_n \in \mathbb{R}^n$ , che è impossibile.

Dimostriamo la proprietà (19.17) per induzione su  $k$ . Per  $k=1$  abbiamo che  $g_1^\top g_0$  perché la prima iterazione coincide con un'iterazione del metodo del gradiente, quindi i gradienti  $g_0$  e  $g_1$  sono ortogonali.

Supponiamo ora che (19.17) valga per un certo  $k \geq 1$  e dimostriamo che continua a valere per  $k+1$ . Dalla scelta della direzione  $d_k$  e da (19.14) segue che

$$g_{k+1}^\top g_k = -g_{k+1}^\top d_k + \beta_k g_{k+1}^\top d_{k-1} = \beta_k g_{k+1}^\top d_{k-1}.$$

Inoltre

$$g_{k+1} = Q x_{k+1} + c = Q(x_k + t_k d_k) + c = Q x_k + t_k Q d_k + c = g_k + t_k Q d_k, \quad (19.18)$$

quindi dalla (19.14) e dall'ipotesi induttiva si ottiene

$$g_{k+1}^\top d_{k-1} = g_k^\top d_{k-1} + t_k d_k^\top Q d_{k-1} = 0,$$

pertanto

$$g_{k+1}^\top g_k = 0. \quad (19.19)$$

Fissiamo ora un indice  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Dalla (19.18) e dall'ipotesi induttiva segue che

$$g_{k+1}^\top g_i = g_k^\top g_i + t_k d_k^\top Q g_i = t_k d_k^\top Q g_i,$$

inoltre per la scelta di  $d_i$  e per l'ipotesi induttiva si ha

$$d_k^T Q g_i = -d_k^T Q d_i + \beta_i d_k^T Q d_{i-1} = 0,$$

perciò

$$g_{k+1}^T g_i = 0. \quad (19.20)$$

Quindi da (19.19) e (19.20) segue che

$$g_{k+1}^T g_i = 0 \quad \forall i = 0, \dots, k. \quad (19.21)$$

□

**Esempio 19.2.1.** Applichiamo il metodo del gradiente coniugato alla stessa funzione usata nell'esempio 19.1.2, ossia  $f(x) = x_1^2 + 10x_2^2$ , a partire dal punto  $x_0 = (10, 1)$ . Alla prima iterazione calcoliamo il gradiente  $g_0 = (20, 20)$ , la direzione  $d_0 = -g_0 = (-20, -20)$  ed il passo  $t_0 = -(g_0^T d_0)/(d_0^T Q d_0) = 1/11$ , e otteniamo il punto  $x_1 = x_0 + t_0 d_0 = (90/11, -9/11)$  (che coincide con il punto ottenuto dal metodo del gradiente). Alla seconda iterazione abbiamo che il gradiente  $g_1 = (180/11, -180/11)$ , il parametro  $\beta_1 = (g_1^T Q d_0)/(d_0^T Q d_0) = 81/121$ , la direzione  $d_1 = -g_1 + \beta_1 d_0 = (-3600/121, 360/121)$  ed il passo  $t_1 = -(g_1^T d_1)/(d_1^T Q d_1) = 11/40$ . Quindi il punto successivo è  $x_2 = x_1 + t_1 d_1 = (0, 0)$  che è il minimo globale di  $f$ . □

**Osservazione 19.2.1.** Si possono ottenere delle formule alternative sia per il passo  $t_k$  che per il parametro  $\beta_k$ . Infatti, da (19.15) e (19.16) si ricava che

$$t_k = \frac{\|g_k\|^2}{d_k^T Q d_k}.$$

Inoltre dalla scelta di  $d_k$ , da (19.17) e da (19.15) si ricava che

$$d_k^T g_{k-1} = -g_k^T g_{k-1} + \beta_k d_{k-1}^T g_{k-1} = -\beta \|g_k\|^2,$$

mentre per (19.18), (19.12) e (19.15) si ha che

$$d_k^T g_{k-1} = d_k^T g_k - t_{k-1} d_k^T Q d_{k-1} = -\|g_k\|^2.$$

Quindi otteniamo che

$$\beta_k = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}.$$

Quest'ultima formula è più economica dal punto di vista computazionale rispetto alla (19.13).

Oltre alla proprietà (19.17), si può dimostrare che se alla  $k$ -esima iterazione il metodo del gradiente coniugato non ha ancora trovato la soluzione  $x^*$ , allora

$$d_k^T Q d_i = 0 \quad \forall i = 0, \dots, k-1,$$

cioè i vettori  $\{d_0, d_1, \dots, d_k\}$  sono coniugati rispetto alla matrice  $Q$ . Inoltre il punto  $x_k$  risulta essere il minimo globale di  $f$  sul sottospazio affine generato dalle direzioni  $d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$  e passante per  $x_0$ . □

**Osservazione 19.2.2.** Per quanto riguarda la velocità di convergenza si può dimostrare che per  $k \geq 1$  si ha

$$\|x_k - x^*\|_Q \leq \left( \frac{\lambda_{n-k+1} - \lambda_1}{\lambda_{n-k+1} + \lambda_1} \right) \|x_0 - x^*\|_Q,$$

dove  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  sono gli autovalori di  $Q$ . Da questo risultato segue che la convergenza è ottenuta in al più  $r$  iterazioni se  $Q$  ha solo  $r$  autovalori distinti. Un altro risultato di convergenza è il seguente:

$$\|x_k - x^*\|_Q \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} - 1}{\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|_Q,$$

che può essere utile quando si conoscono solo il minimo ed il massimo autovalore di  $Q$ . Osserviamo che tale stima dell'errore ha la stessa forma della (19.7) valida per il metodo del gradiente, che tuttavia dipende dal numero di condizionamento  $\lambda_n/\lambda_1$  e non dalla sua radice quadrata  $\sqrt{\lambda_n/\lambda_1}$ . □

Vediamo ora la versione più generale del metodo del gradiente coniugato nel caso di una funzione  $f$  non lineare.

**Metodo del gradiente coniugato (per funzioni non lineari)**

```

Scegli un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e poni  $k := 0$ 
while  $\nabla f(x_k) \neq 0$  do
  if  $k = 0$  then  $d_k := -\nabla f(x_k)$ 
  else  $\beta_k := \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2}$ ,  $d_k := -\nabla f(x_k) + \beta_k d_{k-1}$ 
  Calcola il passo  $t_k$ 
   $x_{k+1} := x_k + t_k d_k$ ,  $k := k + 1$ 

```

Nel caso in cui  $f$  sia del tipo (19.10) ed il passo sia ottenuto con una ricerca esatta, il metodo si riduce a quello visto in precedenza.

Se il passo  $t_k$  è calcolato con una ricerca esatta, allora la direzione  $d_k$  è di discesa per  $f$ , infatti:

$$\nabla f(x_k)^\top d_k = -\|\nabla f(x_k)\|^2 + \beta_k \nabla f(x_k)^\top d_{k-1} = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0,$$

poiché  $\nabla f(x_k)^\top d_{k-1} = 0$ . Se la ricerca del passo non è esatta, il termine  $\nabla f(x_k)^\top d_{k-1}$  potrebbe dominare  $-\|\nabla f(x_k)\|^2$  e la direzione  $d_k$  non sarebbe di discesa. Tuttavia si può dimostrare che  $d_k$  è di discesa se il passo  $t_k$  soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} f(x_k + t_k d_k) &\leq f(x_k) + \alpha t_k \nabla f(x_k)^\top d_k, \\ |\nabla f(x_k + t_k d_k)^\top d_k| &\leq -\beta \nabla f(x_k)^\top d_k, \\ \text{con } 0 < \alpha < \beta < 1/2. \end{aligned} \tag{19.22}$$

**Teorema 19.2.2.** *Se  $f$  è coerciva allora il metodo del gradiente coniugato, con il passo che soddisfa le condizioni (19.22), genera una successione  $\{x_k\}$  tale che*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

### 19.3 Metodo di Newton

Analogamente al caso unidimensionale, il metodo di Newton cerca un punto stazionario di un problema non vincolato. Ad ogni iterazione tale metodo risolve un sistema di equazioni lineari ottenuto facendo un'approssimazione lineare di  $\nabla f(x)$  in un intorno di  $x_k$ , ossia

$$\nabla f(x) \simeq \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k).$$

Se la matrice  $\nabla^2 f(x_k)$  è invertibile, allora  $x_{k+1}$  è il punto in cui si annulla tale approssimazione, cioè:

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k). \tag{19.23}$$

Anche in questo caso osserviamo che  $x_{k+1}$  è il punto stazionario della approssimazione quadratica di  $f$  in un intorno di  $x_k$ :

$$f(x) \simeq f(x_k) + (x - x_k)^\top \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^\top \nabla^2 f(x_k) (x - x_k).$$

#### Metodo di Newton (con passo fissato)

Scegli un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e poni  $k := 0$

**while**  $\nabla f(x_k) \neq 0$  **do**

$d_k := -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$

$x_{k+1} := x_k + d_k$ ,  $k = k + 1$

**Teorema 19.3.1.** *Supponiamo che  $x^*$  sia un minimo locale di  $f$  tale che la matrice  $\nabla^2 f(x^*)$  è definita positiva. Allora esiste un intorno  $U$  di  $x^*$  tale che, comunque si sceglie  $x_0 \in U$ , la successione  $\{x_k\}$  generata dal metodo di Newton converge a  $x^*$  e la convergenza è quadratica.*

La dimostrazione è analoga alla dimostrazione del Teorema 18.2.2.

**Esempio 19.3.1.** Applichiamo il metodo di Newton per trovare un punto stazionario della funzione  $2x_1^4 + 3x_2^4 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2$  a partire dal punto  $x_0 = (10, 5)$ . Il gradiente e la matrice hessiana di  $f$  sono rispettivamente:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1^3 + 4x_1 + x_2 - 3 \\ 12x_2^3 + 8x_2 + x_1 - 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 24x_1^2 + 4 & 1 \\ 1 & 36x_2^2 + 8 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 8042 \\ 1548 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} 2404 & 1 \\ 1 & 908 \end{pmatrix}.$$

Dopo un'iterazione del metodo di Newton otteniamo  $x_1 \simeq (6.6554, 3.2988)$ . Le prime 10 iterazioni del metodo sono riportate nella seguente tabella:

| $k$ | $x_k$     |          | $\ \nabla f(x_k)\ $ |
|-----|-----------|----------|---------------------|
| 0   | 10.000000 | 5.000000 | 8189.631738         |
| 1   | 6.655450  | 3.298838 | 2429.643729         |
| 2   | 4.421132  | 2.149158 | 721.633069          |
| 3   | 2.925965  | 1.361690 | 214.638159          |
| 4   | 1.923841  | 0.811659 | 63.775257           |
| 5   | 1.255001  | 0.428109 | 18.617004           |
| 6   | 0.823359  | 0.209601 | 5.005804            |
| 7   | 0.580141  | 0.171251 | 1.053897            |
| 8   | 0.492175  | 0.179815 | 0.102294            |
| 9   | 0.481639  | 0.180914 | 0.001302            |
| 10  | 0.481502  | 0.180928 | 0.000000            |

La successione converge verso il punto stazionario  $x^* \simeq (0.4815, 0.1809)$  che è anche il minimo globale, poiché la funzione  $f$  è convessa, essendo definita positiva su  $\mathbb{R}^2$  la sua matrice hessiana.  $\square$

**Osservazione 19.3.1.** Nel caso in cui  $f$  sia quadratica:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + d,$$

con la matrice  $Q$  simmetrica definita positiva, il metodo di Newton fornisce il minimo globale di  $f$  in un solo passo, qualunque sia il punto iniziale  $x_0$ . Infatti, se  $x^*$  è il minimo di  $f$ , cioè  $Qx^* + c = 0$ , si ha:

$$x_1 = x_0 - Q^{-1}(Qx_0 + c) = -Q^{-1}c = x^*.$$

□

**Osservazione 19.3.2.** Il metodo di Newton presenta alcuni svantaggi: ad ogni iterazione è necessario calcolare sia il gradiente  $\nabla f(x_k)$  che la matrice hessiana  $\nabla^2 f(x_k)$ , ed invertire quest'ultima. Inoltre, se  $x_0$  è scelto troppo lontano da  $x^*$ , il metodo può non convergere (vedi l'esempio a pag. 336). □

Nel caso in cui la matrice hessiana di  $f$  sia definita positiva in ogni punto di  $\mathbb{R}^n$ , è possibile costruire una versione globalmente convergente del metodo di Newton. Come direzione di ricerca si usa sempre  $d_k = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$  perché è una direzione di discesa, infatti

$$\nabla f(x_k)^T d_k = -\nabla f(x_k)^T [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) < 0,$$

in quanto anche la matrice inversa  $[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}$  è definita positiva. Il passo, invece di essere fissato uguale ad 1, è ottenuto con una ricerca monodimensionale (esatta o inesatta) lungo la direzione  $d_k$ .

#### Metodo di Newton (con ricerca esatta del passo)

Scegli un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e poni  $k := 0$   
**while**  $\nabla f(x_k) \neq 0$  **do**  
      $d_k := -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$ .  
     Calcola una soluzione  $t_k$  del problema  $\min_{t>0} f(x_k + t d_k)$ .  
      $x_{k+1} := x_k + t_k d_k$ ,  $k := k + 1$

**Teorema 19.3.2.** Se  $f$  è coerciva e la matrice  $\nabla^2 f(x)$  è definita positiva per ogni  $x \in \mathbb{R}^2$ , allora, comunque si sceglie il punto iniziale  $x_0$ , il metodo di Newton con ricerca esatta del passo o trova il minimo globale di  $f$  dopo un numero finito di iterazioni, oppure genera una successione  $\{x_k\}$  che converge al minimo globale di  $f$ .

**Dimostrazione.** Dalle ipotesi segue che  $f$  è convessa, quindi i punti stazionari coincidono con i minimi globali. Dimostriamo ora che esiste un unico minimo globale di  $f$ : l'esistenza deriva dalla coercività di  $f$ ; se per assurdo esistessero due diversi minimi globali  $x^*$  e  $y^*$ , allora dallo sviluppo di Taylor si avrebbe

$$f(y^*) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (y^* - x^*) + \frac{1}{2} (y^* - x^*)^T \nabla^2 f(\xi) (y^* - x^*),$$



### 19.3 METODO DI NEWTON

dove  $\xi$  appartiene al segmento di estremi  $x^*$  e  $y^*$ . Poiché  $f(y^*) = f(x^*)$  e  $x^*$  è stazionario, seguirebbe

$$(y^* - x^*)^T \nabla^2 f(\xi) (y^* - x^*) = 0,$$

che è impossibile perché abbiamo supposto che la matrice  $\nabla^2 f(\xi)$  è definita positiva ed il vettore  $y^* - x^* \neq 0$ .

Se il metodo si ferma dopo un numero finito di iterazioni, allora, per il criterio di arresto, trova un punto stazionario, che è il minimo globale. Supponiamo ora che venga generata una successione  $\{x_k\}$  e dimostriamo la convergenza del metodo sfruttando il teorema 18.1.1 di Zangwill. Il metodo è definito dalla multifunzione  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  definita come:

$$\mathcal{A}(x) = \left\{ y = x - t [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x), \text{ dove } t \text{ risolve il problema} \right. \\ \left. \min_{s > 0} f(x - s [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x)) \right\}.$$

- La successione  $\{x_k\}$  è limitata perché la successione  $\{f(x_k)\}$  è decrescente e  $f$  è coerciva.
- La funzione  $f$  è di discesa perché è continua e, se indichiamo con  $S$  l'insieme costituito dall'unico minimo globale, si ha che:

$$\text{se } x \notin S, \text{ allora } f(y) < f(x) \text{ per ogni } y \in \mathcal{A}(x).$$

- La multifunzione  $\mathcal{A}$  è chiusa in  $\mathbb{R}^n \setminus S$ : consideriamo un punto  $\bar{x} \notin S$  e supponiamo che  $x_i \rightarrow \bar{x}$ ,  $y_i \rightarrow \bar{y}$  e  $y_i \in \mathcal{A}(x_i)$ . Quindi si ha

$$y_i = x_i - t_i [\nabla^2 f(x_i)]^{-1} \nabla f(x_i) \quad (19.24)$$

e

$$f(x_i - t_i [\nabla^2 f(x_i)]^{-1} \nabla f(x_i)) \leq f(x_i - s [\nabla^2 f(x_i)]^{-1} \nabla f(x_i)) \quad \forall s > 0. \quad (19.25)$$

Inoltre abbiamo che

$$t_i = \frac{\|x_i - y_i\|}{\|[\nabla^2 f(x_i)]^{-1} \nabla f(x_i)\|} \rightarrow \frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|}{\|[\nabla^2 f(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x})\|} = \bar{t}.$$

Passando al limite in (19.24) si ottiene  $\bar{y} = \bar{x} - \bar{t} [\nabla^2 f(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x})$ . Inoltre, per ogni fissato  $s > 0$ , passando al limite in (19.25) si ottiene

$$f(\bar{x} - \bar{t} [\nabla^2 f(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x})) \leq f(\bar{x} - s [\nabla^2 f(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x})),$$

Pertanto abbiamo dimostrato che  $\bar{y} \in \mathcal{A}(\bar{x})$  e quindi  $\mathcal{A}$  è chiusa in  $\bar{x}$ .

Dal teorema di Zangwill segue che i punti di accumulazione della successione  $\{x_k\}$  appartengono all'insieme  $S$ , ma poiché  $S$  contiene solo il minimo globale, segue che l'intera successione  $\{x_k\}$  converge al minimo globale.  $\square$

Un'altra versione globalmente convergente del metodo di Newton può essere ottenuta facendo, ad ogni iterazione, una ricerca *backtracking* del passo.

Metodo di Newton (con ricerca *backtracking* del passo)

Fissa  $\alpha, \gamma \in (0, 1)$  e  $\bar{t} > 0$ . Scegli  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e poni  $k := 0$ .

**while**  $\nabla f(x_k) \neq 0$  **do**

$d_k := -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$

Calcola il più piccolo numero naturale  $m$  tale che

$$f(x_k + \gamma^m \bar{t} d_k) \leq f(x_k) + \alpha \gamma^m \bar{t} \nabla f(x_k)^\top d_k$$

$t_k := \gamma^m \bar{t}$

$x_{k+1} := x_k + t_k d_k$ ,  $k := k + 1$

**Teorema 19.3.3.** *Supponiamo che  $f$  sia coerciva e che la matrice  $\nabla^2 f(x)$  sia definita positiva per ogni  $x \in \mathbb{R}^2$ . Allora, comunque si sceglie il punto iniziale  $x_0$ , il metodo di Newton con ricerca *backtracking* del passo o trova il minimo globale di  $f$  dopo un numero finito di iterazioni, oppure genera una successione  $\{x_k\}$  che converge al minimo globale di  $f$ . Inoltre se si scelgono  $\alpha \in (0, 1/2)$  e  $\bar{t} = 1$ , allora la convergenza è quadratica.*

**Dimostrazione.** Dalla dimostrazione del teorema 19.3.2 segue che esiste un unico minimo globale, che è anche l'unico punto stazionario.

Se il metodo si ferma dopo un numero finito di iterazioni, allora trova il minimo globale. Se il metodo genera una successione  $\{x_k\}$ , allora la successione  $\{f(x_k)\}$  è decrescente. Poiché  $f$  è coerciva, si ricava che  $\{x_k\}$  è limitata e che  $f$  è limitata inferiormente e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) - f(x_{k+1}) = 0. \quad (19.26)$$

Consideriamo ora un generico punto di accumulazione  $x^*$  di  $\{x_k\}$  e sia  $\{x_\ell\}$  una sottosuccessione che converge a  $x^*$ . Consideriamo due possibili casi: o  $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell > 0$  oppure  $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = 0$ .

Se  $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell > 0$ , allora esistono  $t^* > 0$  ed una sottosuccessione  $\{t_{\ell_p}\}$  tale che  $t_{\ell_p} \geq t^*$ . Allora per la scelta del passo si ha

$$f(x_{\ell_p}) - f(x_{\ell_p+1}) \geq -\alpha t_{\ell_p} \nabla f(x_{\ell_p})^\top d^{\ell_p} \geq \alpha t^* \nabla f(x_{\ell_p})^\top [\nabla^2 f(x_{\ell_p})]^{-1} \nabla f(x_{\ell_p}),$$

quindi per la (19.26) otteniamo

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \nabla f(x_{\ell_p})^\top [\nabla^2 f(x_{\ell_p})]^{-1} \nabla f(x_{\ell_p}) = 0.$$

D'altra parte, dalla continuità del gradiente e della matrice hessiana otteniamo

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \nabla f(x_{\ell_p})^\top [\nabla^2 f(x_{\ell_p})]^{-1} \nabla f(x_{\ell_p}) = \nabla f(x^*)^\top [\nabla^2 f(x^*)]^{-1} \nabla f(x^*),$$

quindi  $\nabla f(x^*)^\top [\nabla^2 f(x^*)]^{-1} \nabla f(x^*) = 0$ . Ma poiché la matrice  $[\nabla^2 f(x^*)]^{-1}$  è definita positiva si ricava che  $x^*$  è il punto stazionario e quindi il minimo globale.

### 19.3 METODO DI NEWTON

Supponiamo ora che  $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = 0$ , cioè  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = 0$ . Per la scelta del passo abbiamo che

$$f(x_\ell) - f\left(x_\ell + \frac{t_\ell}{\gamma} d_\ell\right) < -\alpha \frac{t_\ell}{\gamma} \nabla f(x_\ell)^\top d_\ell.$$

D'altra parte, per il teorema del valor medio, esiste  $\delta_\ell \in (0, 1)$  tale che

$$f(x_\ell) - f\left(x_\ell + \frac{t_\ell}{\gamma} d_\ell\right) = -\frac{t_\ell}{\gamma} \nabla f\left(x_\ell + \delta_\ell \frac{t_\ell}{\gamma} d_\ell\right)^\top d_\ell.$$

Pertanto abbiamo

$$-\nabla f\left(x_\ell + \delta_\ell \frac{t_\ell}{\gamma} d_\ell\right)^\top d_\ell < -\alpha \nabla f(x_\ell)^\top d_\ell.$$

Allora, passando al limite per  $\ell \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\nabla f(x^*)^\top [\nabla^2 f(x^*)]^{-1} \nabla f(x^*) \leq \alpha \nabla f(x^*)^\top [\nabla^2 f(x^*)]^{-1} \nabla f(x^*),$$

e poiché  $\alpha < 1$  e la matrice  $[\nabla^2 f(x^*)]^{-1}$  è definita positiva, otteniamo che  $x^*$  è il punto stazionario e quindi il minimo globale.

Nel caso in cui si scelgano i parametri  $\alpha \in (0, 1/2)$  e  $\bar{t} = 1$ , si può dimostrare che esiste un indice  $\bar{k}$  tale che il passo  $t_k = 1$  per ogni  $k > \bar{k}$ . Pertanto dal teorema 19.3.1 segue che la convergenza verso il minimo globale è quadratica.  $\square$

**Esempio 19.3.2.** Applichiamo il metodo di Newton con ricerca *backtracking* del passo alla funzione  $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2} - x_1 - x_2$  a partire dal punto  $x_0 = (-3, -2)$ . Scegliamo i parametri  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $\gamma = 0.5$  e  $\bar{t} = 1$ . Il gradiente e la matrice hessiana di  $f$  nel punto  $x_0$  sono:

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} e^{-3} - 1 \\ e^{-2} - 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix},$$

quindi la direzione  $d_0 = (e^3 - 1, e^2 - 1)$ . Per calcolare il passo partiamo con  $m = 0$ : poiché

$$f(x_0 + d_0) \simeq 9.7 \cdot 10^6 > f(x_0) + \alpha \nabla f(x_0)^\top d_0 \simeq 5.183,$$

la condizione non è soddisfatta. Poniamo  $m = 1$ :

$$f(x_0 + \gamma d_0) \simeq 689.7 > f(x_0) + \alpha \gamma \nabla f(x_0)^\top d_0 \simeq 5.184,$$

quindi aumentiamo ancora l'esponente che diventa  $m = 2$  e otteniamo

$$f(x_0 + \gamma^2 d_0) \simeq 5.179 < f(x_0) + \alpha \gamma^2 \nabla f(x_0)^\top d_0 \simeq 5.184.$$

Pertanto il passo è  $t_0 = \gamma^2 = 1/4$  ed il nuovo punto è

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = (-3, -2) + \frac{1}{4}(e^3 - 1, e^2 - 1) \simeq (1.771, -0.403).$$

$\square$

**Osservazione 19.3.3.** Un'altra versione inesatta del metodo di Newton è ottenuta applicando, ad ogni iterazione, le condizioni di Armijo–Goldstein–Wolfe alla restrizione  $\varphi(t) = f(x_k + t d_k)$ , ossia:

$$\begin{aligned} (a) \quad & f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k) + \alpha \nabla f(x_k)^\top d_k t_k, \\ (b) \quad & \nabla f(x_k + t_k d_k)^\top d_k \geq \beta \nabla f(x_k)^\top d_k, \end{aligned} \tag{19.27}$$

dove  $d_k = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$ . Anche con questa scelta del passo si può dimostrare che vale lo stesso risultato di convergenza del teorema 19.3.3.  $\square$

## 19.4 Metodo di Frank-Wolfe

Il metodo di Frank-Wolfe si applica per trovare un punto stazionario di un problema vincolato. Descriveremo tale metodo nel caso in cui la regione ammissibile sia un poliedro, cioè consideriamo il problema

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ & Ax \leq b \end{cases} \tag{19.28}$$

dove  $A$  è una matrice  $m \times n$  e  $b$  un vettore di  $\mathbb{R}^m$ . Supponiamo di partire da un punto ammissibile  $x_k$ . Calcoliamo il gradiente di  $f$  nel punto  $x_k$  e risolviamo il problema (19.28) linearizzato nello stesso punto  $x_k$ , cioè il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min & \nabla f(x_k)^\top x \\ & Ax \leq b \end{cases}$$

ed indichiamo con  $y_k$  una soluzione di tale problema lineare. Se anche il punto  $x_k$  risolve il problema linearizzato, cioè

$$\nabla f(x_k)^\top y_k = \nabla f(x_k)^\top x_k,$$

allora il metodo si ferma perché  $x_k$  è un punto stazionario del problema (19.28). Infatti, applicando il teorema 17.3.1 al problema linearizzato otteniamo che deve esistere un vettore di moltiplicatori  $\lambda_k \in \mathbb{R}^m$  tale che

$$\begin{cases} \nabla f(x_k)^\top + \lambda_k^\top A = 0 \\ \lambda_k (A x_k - b) = 0 \\ \lambda_k \geq 0 \end{cases}$$

ossia  $(x_k, \lambda_k)$  è una soluzione del sistema LKT del problema (19.28) e quindi  $x_k$  è un punto stazionario. Se invece  $x_k$  non risolve il problema linearizzato, cioè

$$\nabla f(x_k)^\top y_k < \nabla f(x_k)^\top x_k,$$

ciò significa che

$$\nabla f(x_k)^\top (y_k - x_k) < 0,$$

ossia  $y_k - x_k$  è una direzione di discesa per  $f$ . In tal caso il metodo trova un nuovo punto  $x_{k+1}$  uguale al minimo della funzione  $f$  ristretta al segmento di estremi  $x_k$  e  $y_k$ , ossia il passo  $t_k$  è la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} \min f(x_k + t(y_k - x_k)) \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

#### Metodo di Frank-Wolfe

1. Scegli un punto  $x_0$  ammissibile e poni  $k := 0$
2. Calcola una soluzione  $y_k$  del problema linearizzato:

$$\begin{cases} \min \nabla f(x_k)^\top x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

3. **if**  $\nabla f(x_k)^\top (y_k - x_k) = 0$  **then STOP**  
**else** calcola una soluzione  $t_k$  del problema  $\min_{t \in [0,1]} f(x_k + t(y_k - x_k))$ .
4. Poni  $x_{k+1} := x_k + t_k(y_k - x_k)$ ,  $k := k + 1$  e torna al passo 2

**Teorema 19.4.1.** *Supponiamo che la regione ammissibile sia limitata oppure che la funzione  $f$  sia coerciva. Allora, comunque si scelga il punto iniziale  $x_0$ , il metodo di Frank-Wolfe o trova un punto stazionario dopo un numero finito di iterazioni, oppure genera una successione  $\{x_k\}$  tale che ogni suo punto di accumulazione è un punto stazionario.*

**Dimostrazione.** Per dimostrare la tesi applicheremo il Teorema 18.1.1. Sia  $S$  l'insieme dei punti stazionari per il problema (19.28).

Prima dimostriamo che la successione  $\{x_k\}$  è limitata. Infatti, la successione  $\{x_k\}$  è contenuta nel poliedro perché esso è un insieme convesso; inoltre tale successione è anche contenuta nel sottolivello di  $f$  che corrisponde al valore  $f(x_0)$ , cioè l'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ , perché il metodo di Frank-Wolfe è un metodo di discesa, cioè:

$$f(x_0) > f(x_1) > f(x_2) > \dots$$

Le ipotesi stabiliscono che o il poliedro è limitato o che  $f$  è coerciva, e quindi il sottolivello precedente è limitato. In entrambi i casi la successione risulta limitata.

Se  $x_k \notin S$  allora:

$$\nabla f(x_k)^\top y_k < \nabla f(x_k)^\top x_k,$$

quindi,  $y_k - x_k$  è una direzione di discesa per  $f$  e  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ , quindi scegliamo come funzione di discesa  $\psi = f$ . Per applicare il Teorema 18.1.1, dimostriamo che l'algoritmo descritto è una multifunzione chiusa. Intanto, osserviamo che è dato da  $U \circ D$ , dove  $D$  è la mappa che dà la

direzione e  $U$  è il processo di minimizzazione unidimensionale in  $[x_k, y_k]$ . Ovvero,  $D(\bar{x})$  è l'insieme delle direzioni  $\bar{y} - \bar{x}$ , dove  $\bar{y}$  è un vertice ottimo. Mostriamo che  $D$  è una mappa chiusa. Sia  $x_k \rightarrow \bar{x}$  e sia  $y_k$  tale che  $y_k - x_k \in D(x_k)$  e  $y_k \rightarrow \bar{y}$ . Ma si ha:

$$\nabla f(x_k)^\top y_k \leq \nabla f(x_k)^\top x \quad \forall x$$

e, poiché  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1$ , si ha:

$$\nabla f(\bar{x})^\top \bar{y} \leq \nabla f(\bar{x})^\top x \quad \forall x.$$

Allora  $\bar{y}$  è una soluzione ottima di

$$\begin{cases} \min \nabla f(\bar{x})^\top x \\ Ax \leq b. \end{cases}$$

Questo prova che  $\bar{y} - \bar{x} \in D(\bar{x})$ , cioè che  $D$  è chiusa. La multifunzione  $U$  è chiusa per la continuità di  $f$  e di  $\nabla f$ , quindi, si ha la tesi per il Teorema 18.1.1, osservando che la composizione di mappe chiuse è chiusa.  $\square$

**Esempio 19.4.1.** Consideriamo il seguente problema quadratico:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2 + x_1 \\ -3 x_1 + 2 x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2 x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2. \end{cases} \quad (19.29)$$

Calcoliamo un'iterazione del metodo di Frank-Wolfe, a partire dal punto  $x_0 = (0, 1)$ . Si ha che  $\nabla f(x_0) = (-1, 2)$ ; la soluzione ottima di:

$$\begin{cases} \min -x_1 + 2 x_2 \\ -3 x_1 + 2 x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2 x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

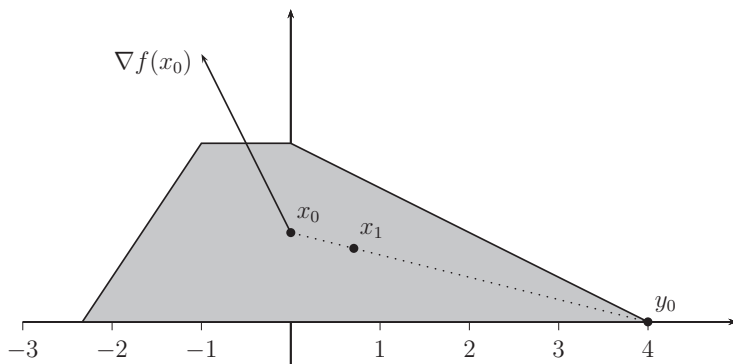
è ottenuta nel vertice  $y_0 = (4, 0)$ . Occorre determinare il minimo della funzione  $f$  ristretta al segmento di estremi  $(0, 1)$  e  $(4, 0)$ , le cui equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = 4t \\ x_2(t) = 1 - t. \end{cases}$$

Indicando con  $\varphi$  la restrizione di  $f$  al segmento, si ha:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}(4t)^2 + (1-t)^2 - 8t(1-t) + 4t = 17t^2 - 6t + 1,$$

che assume minimo per  $t_0 = \frac{3}{17}$ , quindi  $x_1 = (\frac{12}{17}, \frac{14}{17})$ .



□

## 19.5 Metodo del gradiente proiettato

Anche il metodo del gradiente proiettato si applica per trovare un punto stazionario di un problema vincolato. Consideriamo in particolare il problema (19.28). Alla  $k$ -esima iterazione se il punto corrente  $x_k$  è interno alla regione ammissibile, si sceglie la direzione  $d_k = -\nabla f(x_k)$ ; se invece  $x_k$  appartiene alla frontiera della regione ammissibile, si sceglie  $d_k$  uguale alla proiezione ortogonale di  $-\nabla f(x_k)$  sul sottospazio vettoriale definito dai vincoli attivi nel punto  $x_k$  (vedi Figura 19.1).

**Lemma 19.5.1.** *La proiezione ortogonale di un vettore  $y \in \mathbb{R}^n$  sul sottospazio  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx = 0\}$  è data dal vettore  $Hy$ , dove la matrice  $H = I - M^T(MM^T)^{-1}M$ .*

**Dimostrazione.** Se la matrice  $M$  è vuota, allora il sottospazio  $S = \mathbb{R}^n$  e, quindi,  $Hy = y$  è la proiezione di  $y$  su  $\mathbb{R}^n$ . Se  $M$  non è vuota, dimostriamo che  $Hy \in S$  e che  $y - Hy$  è ortogonale ad  $S$ , cioè:

$$(y - Hy)^T x = 0 \quad \forall x \in S.$$

Poiché si ha

$$MHy = My - M^T(MM^T)^{-1}My = My - My = 0,$$

segue che  $Hy \in S$ . Inoltre, abbiamo che

$$y - Hy = (I - H)y = (I - (I - M^T(MM^T)^{-1}M))y = M^T(MM^T)^{-1}My,$$

e quindi per ogni  $x \in S$  si ha che

$$(y - Hy)^T x = y^T M^T [(M^T)^{-1}]^T Mx = 0.$$

□

Metodo del gradiente proiettato

1. Scegli un punto ammissibile  $x_0$  e poni  $k := 0$
2. Sia  $\mathcal{A} = \{i : A_i x_k = b_i\}$  e  $M$  la sottomatrice di  $A$  avente per righe i vettori  $A_i$  con  $i \in \mathcal{A}$ .
3. Calcola la matrice  $H := I - M^T(M M^T)^{-1}M$  e la direzione  $d_k := -H \nabla f(x_k)$
4. **if**  $d_k \neq 0$

**then** calcola una soluzione  $\hat{t}_k$  del problema:

$$\begin{cases} \max t \\ A(x_k + t d_k) \leq b \end{cases}$$

calcola una soluzione  $t_k$  del problema  $\min_{0 \leq t \leq \hat{t}_k} f(x_k + t d_k)$

$x_{k+1} := x_k + t_k d_k$ ,  $k := k + 1$  e torna al passo 2

**else** calcola  $\lambda := -(M M^T)^{-1} M \nabla f(x_k)$

**if**  $\lambda \geq 0$  **then** STOP

**else** calcola  $\lambda_j := \min_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i$ , elimina da  $M$  la riga  $A_j$  e torna al passo 3

Figura 19.1: metodo del gradiente proiettato



**Teorema 19.5.1.** *Ad ogni passo  $k$ , valgono i seguenti fatti:*

1. se  $d_k \neq 0$ , allora  $d_k$  è una direzione di discesa per  $f$ ;
2. se  $d_k = 0$  e  $\lambda \geq 0$ , allora  $(x_k, \lambda)$  è una soluzione del sistema LKT per il problema (19.28).

**Dimostrazione.**

1. Indichiamo  $g_k = -\nabla f(x_k)$  e quindi  $d_k = H g_k$ . Allora si ha che:

$$g_k^\top d_k = g_k^\top H g_k = (g_k - H g_k + H g_k)^\top H g_k = (g_k - H g_k)^\top H g_k + \|H g_k\|^2,$$

ma, per il lemma 19.5.1, il vettore  $g_k - H g_k$  è ortogonale a  $H g_k$ , quindi

$$g_k^\top d_k = \|H g_k\|^2 = \|d_k\|^2 > 0,$$

quindi  $d_k$  è una direzione di discesa.

2. Se  $d_k = 0$ , allora

$$\begin{aligned} 0 &= H \nabla f(x_k) \\ &= (I - M^\top (M M^\top)^{-1} M) \nabla f(x_k) \\ &= \nabla f(x_k) - M^\top (M M^\top)^{-1} M \nabla f(x_k) \\ &= \nabla f(x_k) + M^\top \lambda \\ &= \nabla f(x_k) + \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i A_i \end{aligned} \tag{19.30}$$

Definendo  $\lambda_i = 0$  per ogni indice  $i \notin \mathcal{A}$  otteniamo

$$\begin{cases} \nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i = 0 \\ \lambda_i (A_i x_k - b_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

cioè  $(x_k, \lambda)$  è una soluzione del sistema LKT associato al problema (19.28).

□

**Teorema 19.5.2.** *Supponiamo che la regione ammissibile sia limitata oppure che la funzione  $f$  sia coerciva. Allora, comunque si scelga il punto iniziale  $x_0$ , il metodo del gradiente proiettato o trova un punto stazionario dopo un numero finito di iterazioni, oppure genera una successione  $\{x_k\}$  tale che ogni suo punto di accumulazione è un punto stazionario.*

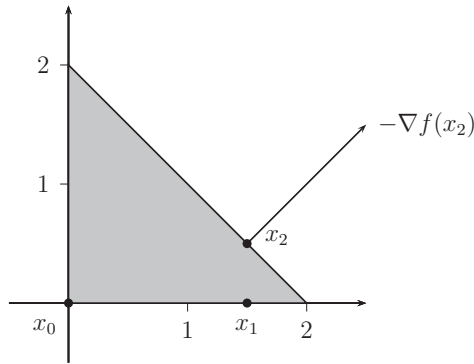
**Esempio 19.5.1.** Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \min 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

# 19. METODI DI PNL PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Partiamo dal punto  $x_0 = (0, 0)$ , quindi  $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $d_0 = (0, 0)$ . Calcoliamo  $\lambda = (-6, 0)$  ed eliminiamo da  $M$  la prima riga ottenendo  $M = (0, -1)$ . La nuova matrice di proiezione è  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e quindi  $d_0 = (6, 0)$ . Calcoliamo il massimo spostamento  $\hat{t}_0 = 1/3$  ed il passo  $t_0 = 1/4$ , perciò  $x_1 = (3/2, 0)$ .

La nuova matrice  $M$  è  $M = (0, -1)$  e la matrice di proiezione è  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La direzione è  $d_1 = (0, 0)$ . Calcoliamo  $\lambda = -3$ , quindi la matrice  $M$  diventa vuota e  $H = I$ . La direzione diventa  $d_1 = (0, 3)$  quindi abbiamo  $\hat{t}_1 = \frac{1}{6}$  ed il passo  $t_1 = 1/6$ , quindi  $x_2 = (3/2, 1/2)$ . La nuova matrice  $M$  è  $M = (1, 1)$  e  $H = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ . La direzione è  $d_2 = (0, 0)$ . Calcoliamo  $\lambda = 1$ , quindi  $x_2$  è un punto stazionario. Notiamo che  $x_2$  è anche il minimo globale poiché  $f$  è convessa.



# Capitolo 20

## Esercizi di PNL

1. Si consideri il seguente problema di PNL vincolata:

$$\begin{cases} \min & -x_1 - x_2 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_1^2 + 4 x_2^2 = 4 \end{cases}$$

Trovare tutte le soluzioni del sistema LKT associato e la soluzione ottima del problema.

2. Trovare massimi e minimi della funzione  $f(x_1, x_2) = x_1$  sull'insieme

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 3 \leq 0, \quad -x_1 - x_2^2 + 2 \leq 0\}.$$

3. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$  e l'insieme

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7\}.$$

- a) Determinare massimi e minimi di  $f$  su  $\Omega$ .  
b) Partendo da  $(3, 2, 0)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo di Frank-Wolfe per la ricerca del massimo.  
c) Partendo da  $(3, 2, 0)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo del gradiente proiettato per la ricerca del massimo.
4. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 6x_2(x_1 + x_2)$ . Partendo da  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$  eseguire una iterazione dell'algoritmo di Frank-Wolfe per la ricerca del massimo sul poliedro di vertici  $(1, 0), (0, -2), (0, 1), (-4, 0)$ .

5. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1 + 4x_3$  e l'insieme

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 2\}.$$

- a) Determinare massimi e minimi di  $f$  su  $\Omega$ .

- b) Partendo da  $(2, 0, 0)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo di Frank-Wolfe per la ricerca del minimo.
- c) Partendo da  $(2, 0, 0)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo del gradiente proiettato per la ricerca del minimo.
6. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1^3 + 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ . Partendo da  $(0, 2)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo di Frank-Wolfe per la ricerca del massimo sul poliedro di vertici  $(0, 0), (3, 0), (5, 2), (0, 3)$ .
7. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$ . Eseguire una iterazione dell'algoritmo del gradiente proiettato per la ricerca del massimo di  $f$  sul poliedro limitato di vertici  $(0, 3), (2, 0), (0, 0), (2, 4), (3, 2)$ , partendo dal punto  $(1, 2)$ .
8. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2$  ed il poliedro limitato  $P$  di vertici  $(1, 0), (1, 4), (0, 1), (5, 0)$ .
- a) Trovare massimi e minimi globali di  $f$  su  $P$ .
- b) Partendo da  $(3, 1)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo di Frank-Wolfe per la ricerca del minimo.
- c) Partendo da  $(3, 1)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo del gradiente proiettato per la ricerca del minimo.
9. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2) = -9x_1^2 - 13x_2^2 + 54x_1 + 78x_2$  e il poliedro  $P$  di vertici  $(0, 0), (2, 6), (0, 6), (4, 0)$ .
- a) Trovare massimi e minimi globali di  $f$  su  $P$ .
- b) Partendo da  $(1, 2)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo di Frank-Wolfe per la ricerca del massimo.
- c) Partendo da  $(1, 2)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo del gradiente proiettato per la ricerca del massimo.
10. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ .
- a) Trovare, se esistono, massimi e minimi globali di  $f$  sull'insieme
- $$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 = 6\}.$$
- b) Partendo da  $(1, 2)$  eseguire una iterazione dell'algoritmo di Frank-Wolfe per la ricerca del minimo di  $f$  sul poliedro  $P$  di vertici  $(0, 0), (2, 6), (0, 6), (4, 0)$ .
11. Sia data  $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3 - 2x_1^2 - x_1 + x_2$  e l'insieme
- $$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \leq 2\}.$$
- a) Trovare, se esistono, i minimi e i massimi globali di  $f$  su  $\Omega$ .
- b) Partendo da  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  eseguire una iterazione dell'algoritmo del gradiente proiettato per la ricerca del minimo.

12. Sia data  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 + 2 x_2$  e l'insieme

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 2, \quad x_2 \geq 0\}.$$

- a) Trovare massimi e minimi di  $f$  su  $\Omega$ .  
 b) Partendo da  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  eseguire una iterazione dell'algoritmo di Frank-Wolfe per la ricerca del minimo di  $f$  su  $\Omega$ .
13. Sia data la funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 5 x_2^2 - x_1 x_2$  e l'insieme

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 4 x_2^2 \leq 4\}.$$

Trovare massimi e minimi di  $f$  su  $\Omega$ .

14. Date due funzioni convesse  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dire se la funzione  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  è convessa.
15. Tra tutti i rettangoli aventi area uguale a 100 metri quadrati, determinare quello che ha il perimetro minimo.
16. Tra tutti i rettangoli aventi perimetro uguale a 100 metri, determinare quello che ha l'area massima.
17. Trovare massimi e minimi della funzione  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  sull'insieme

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 2, \quad (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \geq 2\}.$$

18. Trovare massimi e minimi della funzione  $f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$  sull'insieme

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2^2 - 2 \leq 0, \quad x_1 + x_2^2 - 3 \leq 0\}.$$



# Appendice A

## Prerequisiti

### Strutture di $\mathbb{R}^n$

#### *Struttura algebrica-vettoriale*

Si definisce l'addizione tra due vettori e la moltiplicazione per uno scalare. Supporremo noti i concetti di indipendenza lineare, basi, dimensione, sottospazi e di determinante di una matrice.

#### *Struttura metrica*

La distanza tra due vettori  $x$  e  $y$  è

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

La distanza gode di alcune proprietà fondamentali:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3.  $d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$
4.  $d(x, y) \leq d(x, 0) + d(y, 0)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

#### *Struttura di spazio normato*

La lunghezza di un vettore  $x$  (detta norma) è data da

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

La norma gode di alcune proprietà:

1.  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$
2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

### **Struttura hilbertiana**

Il prodotto scalare tra  $x$  e  $y$  è definito da

$$x^\top y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Le relazioni di compatibilità tra distanza, norma e prodotto scalare sono:

1.  $d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2.  $d(x, 0) = \|x\| = \sqrt{x^\top x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
3.  $|x^\top y| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
4.  $x^\top y = \|x\| \|y\| \cos \theta$ , dove  $\theta \in [0, \pi]$  è l'angolo formato da  $x$  e  $y$

## **Insiemi aperti e chiusi**

Una successione  $\{x_k\}$  di vettori di  $\mathbb{R}^n$  si dice che converge ad un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intero  $\bar{k}$  tale che  $\|x_k - x\| < \varepsilon$  per ogni  $k > \bar{k}$ . In tal caso si scrive  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ .

Una successione  $\{x_k\}$  è detta limitata se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\|x_k\| \leq \alpha$  per ogni  $k$ . Un sottoinsieme infinito di una successione  $\{x_k\}$  è chiamata sottosuccessione di  $\{x_k\}$ . Un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  è detto punto di accumulazione di una successione  $\{x_k\}$  se esiste una sottosuccessione di  $\{x_k\}$  che converge a  $x$ . Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass ogni successione limitata ammette almeno un punto di accumulazione.

Dato un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  ed un numero  $\varepsilon > 0$ , l'insieme  $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$  è chiamato sfera aperta di centro  $x$  e raggio  $\varepsilon$  e denotato con  $B(x, \varepsilon)$ . Un intorno di  $x$  è un insieme  $U \subset \mathbb{R}^n$  che contiene una sfera aperta di centro  $x$ . Dato un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}^n$ , diciamo che  $x$  è un punto interno di  $X$  se esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subseteq X$ . L'insieme dei punti interni di  $X$  è chiamato parte interna di  $X$  e viene indicato con  $\text{int}(X)$ . Un insieme  $X$  si dice aperto se  $X = \text{int}(X)$ .

Un punto  $x$  è detto punto di chiusura di un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}^n$  se esiste una successione  $\{x_k\}$  contenuta in  $X$  che converge a  $x$ . La chiusura di  $X$ , denotata con  $\text{cl}(X)$ , è l'insieme di tutti i punti di chiusura di  $X$ . Un insieme  $X$  si dice chiuso se  $X = \text{cl}(X)$ . Un vettore  $x$  è detto punto di frontiera di  $X$  se  $x$  è un punto di chiusura di  $X$  e non è un punto interno di  $X$ . La frontiera di  $X$  è l'insieme di tutti i punti di frontiera di  $X$ .

Un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}^n$  è detto limitato se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\|x\| \leq \alpha$  per ogni  $x \in X$ .



## Funzioni continue e derivabili

Siano dati un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}^n$ , un vettore  $x \in X$  ed una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che la funzione  $f$  tende al limite  $\ell \in [-\infty, +\infty]$  quando  $y$  tende a  $x$ , e si scrive  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = \ell$ , se per ogni successione  $\{x_k\} \subseteq X \setminus \{x\}$  che converge a  $x$ , la successione  $\{f(x_k)\}$  converge a  $\ell$ . Se per ogni successione  $\{x_k\} \subseteq X \setminus \{x\}$  che converge a  $x$  e tale che  $x_k \geq x$ , la successione  $\{f(x_k)\}$  converge a  $\ell$ , allora scriviamo  $\lim_{y \downarrow x} f(y) = \ell$ .

La funzione  $f$  è continua in  $x$  se  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$ . La funzione  $f$  è semicontinua superiormente in  $x$  se per ogni successione  $\{x_k\} \subseteq X \setminus \{x\}$  che converge a  $x$  si ha

$$f(x) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \left[ \sup_{k \geq m} f(x_k) \right].$$

La funzione  $f$  è detta semicontinua inferiormente in  $x$  se per ogni successione  $\{x_k\} \subseteq X \setminus \{x\}$  che converge a  $x$  si ha

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left[ \inf_{k \geq m} f(x_k) \right].$$

Una funzione è continua in  $x$  se e solo se è semicontinua superiormente e semicontinua inferiormente in  $x$ . La funzione  $f$  è continua (semicontinua superiormente o inferiormente) su  $X$  se è continua (semicontinua superiormente o inferiormente) in ogni punto di  $X$ .

**Teorema A.1** (Weierstrass).

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  è chiuso e limitato e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è semicontinua inferiormente (superiormente) su  $X$  allora esiste il minimo (massimo) globale di  $f$  su  $X$ .

Data una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  ed un vettore  $d \in \mathbb{R}^n$ , Se esiste finito il limite:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t},$$

allora esso è chiamato derivata direzionale di  $f$  nel punto  $x$  lungo la direzione  $d$  e si indica con  $\frac{\partial f}{\partial d}(x)$ . Se  $d$  coincide con l' $i$ -esimo vettore  $e_i$  della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  (tutte le componenti di  $e_i$  sono uguali a 0 tranne l' $i$ -esima che vale 1), allora la derivata direzionale è chiamata  $i$ -esima derivata parziale di  $f$  in  $x$  ed è denotata con  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ . Se  $f$  ammette tutte le  $n$  derivate parziali in  $x$ , allora il vettore

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^T$$

è chiamato gradiente di  $f$  in  $x$ . Se la funzione  $f$  ammette le derivate parziali in tutti i punti di un insieme aperto  $X$  e tali derivate sono continue su  $X$ , allora si dice che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  su  $X$ . Se  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  su un insieme aperto  $X$ , allora in tutti i punti di  $X$  esistono le derivate direzionali di  $f$  in tutte le direzioni  $d \in \mathbb{R}^n$  ed inoltre vale la relazione

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x) = d^T \nabla f(x).$$

## A. PREREQUISITI

Se ogni derivata parziale di  $f$  in  $x$  ammette a sua volta le derivate parziali nel punto  $x$ , parliamo di derivate parziali seconde della  $f$  e l' $i$ -esima derivata parziale di  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  si indica con  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ . Quando  $i = j$ , scriviamo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ . La matrice quadrata

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

è chiamata matrice hessiana di  $f$  nel punto  $x$ . Se le derivate parziali seconde sono continue in  $x$ , allora la matrice hessiana  $\nabla^2 f(x)$  è simmetrica. Quando le derivate parziali seconde di  $f$  esistono e sono continue in un insieme aperto  $X$ , allora  $f$  è detta di classe  $\mathcal{C}^2$  su  $X$ .

Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^2$  su un intorno  $U$  di  $x$ , allora per ogni  $y \in U$  si ha:

$$f(y) = f(x) + (y - x)^\top \nabla f(x) + \frac{1}{2}(y - x)^\top \nabla^2 f(x) (y - x) + o(\|y - x\|^2), \quad (\text{A.1})$$

dove  $o(\|y - x\|^2)$  è infinitesimo per  $y$  che tende a  $x$  di ordine superiore a  $\|y - x\|^2$ , cioè:

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{o(\|y - x\|^2)}{\|y - x\|^2} = 0.$$

La formula (A.1) è chiamata sviluppo di Taylor fino al secondo ordine di  $f$  nell'intorno  $U$ .

Una funzione vettoriale  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^\top$  è detta di classe  $\mathcal{C}^1$  su un insieme aperto  $X$  se le sue componenti  $f_1, \dots, f_m$  sono di classe  $\mathcal{C}^1$  su  $X$ .

La matrice  $m \times n$  avente per righe i gradienti (trasposti) delle componenti  $f_1, \dots, f_m$ , ossia:

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

è chiamata matrice jacobiana di  $f$  in  $x$ .

## A. PREREQUISITI

Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  sono due funzioni vettoriali di classe  $\mathcal{C}^1$ , allora anche la funzione composta  $h(x) = g(f(x))$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  ed inoltre la matrice jacobiana di  $h$  in  $x$  è il prodotto della matrice jacobiana di  $g$  in  $f(x)$  per la matrice jacobiana di  $f$  in  $x$ :

$$Jh(x) = Jg(f(x)) Jf(x).$$

Se  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^1$ , con  $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , allora  $J_x f(x^0, y^0)$  indica la matrice jacobiana di  $f$  rispetto alla variabile  $x$  calcolata in  $(x^0, y^0)$ . Analogamente si definisce la matrice  $J_y f(x^0, y^0)$ .

**Teorema A.2** (delle funzioni implicite).

Se  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  e nel punto  $(x^0, y^0)$  risulta

$$f(x^0, y^0) = 0, \quad \det(J_y f(x^0, y^0)) \neq 0,$$

allora esistono un intorno  $U$  di  $x^0$  in  $\mathbb{R}^m$ , un intorno  $V$  di  $y^0$  in  $\mathbb{R}^n$  e una funzione  $g : U \rightarrow V$  tale che  $f(x, g(x)) = 0$  per ogni  $x \in U$ . Inoltre  $g$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  e risulta

$$Jg(x) = -[J_y f(x, g(x))]^{-1} J_x f(x, g(x)) \quad \forall x \in U.$$

### **Funzioni quadratiche**

Una funzione quadratica di  $n$  variabili è una funzione polinomiale di secondo grado nelle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Tale funzione si può sempre scrivere nella forma:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + d, \tag{A.2}$$

dove  $Q$  è una matrice simmetrica  $n \times n$ ,  $c$  è un vettore di  $\mathbb{R}^n$  e  $d$  è un numero reale. Il gradiente della funzione è  $\nabla f(x) = Qx + c$  e la matrice hessiana è  $\nabla^2 f(x) = Q$ .

Ad esempio, la funzione quadratica  $f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_1x_2 + 6x_1 + 7x_2 + 8$  si può scrivere nella forma (A.2), dove  $Q = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$  è la matrice hessiana di  $f$ , il vettore  $c = (6, 7)^\top$  è formato dai coefficienti che moltiplicano le variabili  $x_1$  e  $x_2$ , e  $d = 8$  è la costante.

## **Matrici (semi)definite positive**

Data una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  con elementi reali, se uno scalare  $\lambda \in \mathbb{C}$  ed un vettore  $v \in \mathbb{C}^n$ , con  $v \neq 0$ , sono tali che

$$Av = \lambda v,$$

allora  $\lambda$  è detto autovalore di  $A$  e  $v$  è detto autovettore corrispondente a  $\lambda$ . Gli autovalori di  $A$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica di  $A$ :

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

## A. PREREQUISITI

dove  $I$  indica la matrice identità. Si può dimostrare che se la matrice  $A$  è simmetrica, allora gli autovalori di  $A$  sono reali.

Una matrice reale simmetrica  $A$  di ordine  $n$  è detta:

- *semidefinita positiva* se  $d^T A d \geq 0$  per ogni vettore  $d \neq 0$ .
- *definita positiva* se  $d^T A d > 0$  per ogni vettore  $d \neq 0$ .
- *semidefinita negativa* se  $d^T A d \leq 0$  per ogni vettore  $d \neq 0$ .
- *definita negativa* se  $d^T A d < 0$  per ogni vettore  $d \neq 0$ .
- *indefinita* se non è né semidefinita positiva, né semidefinita negativa.

Le matrici (semi)definite positive e negative si possono caratterizzare in base al segno dei loro autovalori, infatti si può dimostrare che una matrice reale simmetrica è:

- semidefinita positiva  $\iff$  tutti gli autovalori sono  $\geq 0$
- definita positiva  $\iff$  tutti gli autovalori sono  $> 0$
- semidefinita negativa  $\iff$  tutti gli autovalori sono  $\leq 0$
- definita negativa  $\iff$  tutti gli autovalori sono  $< 0$
- indefinita  $\iff$  esistono autovalori  $> 0$  e  $< 0$

Per determinare se una matrice simmetrica  $2 \times 2$  sia (semi)definita positiva o negativa, è sufficiente calcolare i segni del determinante e della traccia (cioè la somma degli elementi diagonali) della matrice. Infatti, data una matrice simmetrica  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

i suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

È noto che la somma delle soluzioni è uguale al termine  $a + c$  (cioè la traccia di  $A$ , indicata con  $\text{tr}(A)$ ), mentre il prodotto delle soluzioni è uguale al termine  $ac - b^2$  (cioè il determinante di  $A$ ). Quindi se  $\det(A) > 0$  allora gli autovalori di  $A$  sono concordi; inoltre se  $\text{tr}(A) > 0$ , allora gli autovalori sono entrambi positivi e quindi  $A$  è definita positiva, mentre se  $\text{tr}(A) < 0$  gli autovalori sono entrambi negativi ed  $A$  è definita negativa. Se  $\det(A) < 0$ , allora gli autovalori sono discordi e quindi  $A$  è indefinita. Infine se  $\det(A) = 0$ , allora un autovalore è nullo e l'altro è uguale a  $\text{tr}(A)$ .

Ad esempio, la matrice  $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  ha il determinante uguale a  $-3$  e la traccia uguale a  $11$ , quindi entrambi gli autovalori sono positivi e la matrice è definita positiva. La

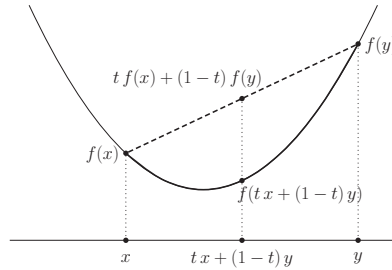
matrice  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$  ha il determinante uguale a 7 e la traccia uguale a  $-6$ , quindi gli autovalori sono entrambi negativi e la matrice è definita negativa. La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  ha il determinante uguale a  $-1$ , quindi gli autovalori sono discordi e la matrice è indefinita. Infine, la matrice  $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$  ha il determinante nullo e la traccia uguale a 13, quindi è semidefinita positiva.

## Funzioni convesse

Dato un insieme convesso  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *convessa* se per ogni  $x, y \in X$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  si ha

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

La funzione  $f$  si dice *concava* se  $-f$  è convessa. La definizione di convessità equivale a dire che, per ogni scelta di  $x, y \in X$ , il segmento di estremi  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  giace al di sopra del grafico della funzione  $f$  ristretta al segmento  $[x, y]$ .

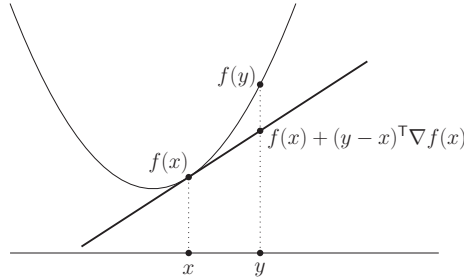


- Una funzione affine  $f(x) = c^T x + d$ , dove  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $d \in \mathbb{R}$ , è sia convessa che concava.
- Se  $f$  e  $g$  sono funzioni convesse, allora anche  $f + g$  è una funzione convessa.
- Se  $f$  è una funzione convessa e  $\alpha > 0$ , allora  $\alpha f$  è convessa.
- Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa non decrescente, allora la funzione composta  $g \circ f$  è convessa.
- Se  $f$  è convessa, allora il sottolivello  $L_\alpha^- = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$  è convesso per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Le funzioni convesse si possono caratterizzare in base alle proprietà delle loro derivate parziali prime.

**Teorema A.3.** Se  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  è un insieme convesso aperto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $\mathcal{C}^1$ ; allora  $f$  è convessa  $\iff f(y) \geq f(x) + (y - x)^T \nabla f(x)$  per ogni  $x, y \in X$ .

Il Teorema precedente afferma che una funzione è convessa se e solo se il piano tangente al grafico in ogni suo punto giace al di sotto del grafico della funzione.



Le funzioni convesse si possono caratterizzare anche in base alle proprietà delle loro derivate parziali seconde.

**Teorema A.4.** Se  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  è un insieme convesso aperto ed  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $\mathcal{C}^2$ ; allora  $f$  è convessa  $\iff$  la matrice  $\nabla^2 f(x)$  è semidefinita positiva per ogni  $x \in X$ .

Nel caso di una funzione quadratica  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + d$ , la matrice hessiana è costante e coincide con  $Q$ , quindi  $f$  è convessa se e solo se gli autovalori di  $Q$  sono  $\geq 0$ . Ad esempio, la funzione  $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_2 - x_1$  è convessa perché la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  è definita positiva, essendo  $\det(Q) = 23$  e  $\text{tr}(Q) = 14$ .

## Funzioni coercive

Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è detta *coerciva* se per ogni successione  $\{x_k\}$  tale che  $\|x_k\| \rightarrow \infty$  si ha che  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = +\infty$ . Un ovvio esempio di funzione coerciva è  $f(x) = \|x\|^2$ .

Una funzione quadratica  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + d$  è coerciva se e solo se la matrice  $Q$  è definita positiva. Ad esempio, la funzione  $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 - x_1 + 5x_2$  è coerciva perché la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$  è definita positiva in quanto  $\det(Q) = 23$  e  $\text{tr}(Q) = 12$ .

Per dimostrare che una funzione non quadratica  $f$  è coerciva, spesso conviene cercare una funzione coerciva  $g$  tale che  $f(x) \geq g(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ad esempio, la funzione  $f(x) = 3x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2 + x_2^2$  è coerciva perché  $f(x) \geq g(x) = x_1^2 + x_2^2$  che è coerciva.



Finito di stampare nel mese di dicembre 2012  
da Tipografia Monteserra S.n.c. - Vicopisano  
per conto di Pisa University Press



# EX LIBRIS



Αριστοτέλης

Questo e-book appartiene a  
CorradoD'Amico