

Nota: documento inizialmente pensato per uso personale successivamente pubblicato sotto consiglio di amici. Quindi se pensate sia scritto da schifo avete assolutamente ragione.

Data ignota (girato da telegram)

Qual'è la condizione degli scarti complementari? Perché ci interessa?

La condizione degli scarti complementari è una condizione che viene rispettata dalle soluzioni ottime dei problema Primale e Duale. Questa condizione ci permette di individuare se la soluzione di base attuale è una soluzione ottima. In questa situazione i valori della funzione obiettivo del primale e la funzione obiettivo del duale coincidono.

Cioè $cx = yb$;

ma se $c = yA \Rightarrow yAx = yb \Rightarrow 0 = yb - yAx$

$\Rightarrow y(b - Ax) = 0$;

Questa equazione mi dice che se $Ax < b$ (vincolo non attivo) allora $y=0$;

Se $y>0$ allora $\Rightarrow Ax = b$ (vincolo attivo).

Questo teorema mi dice che quando si ha un vincolo attivo nel primale allora esiste uno scarto nel duale, ossia esiste la y corrispondente alla riga del vincolo attivo che è maggiore di zero.

Al contrario se ho un vincolo non attivo nel primale, e quindi quel vincolo ha uno scarto, allora la y corrispondente alla riga del vincolo è necessariamente zero.

Potrebbe capitare che sia il vincolo sia la variabile siano uguali a zero.

Questo significa che possono esistere molteplici soluzioni ottime per il primale.

Algoritmo dei cammini minimi successivi per il problema del flusso di costo minimo

(L'ammissibilità non è garantita)

L'algoritmo dei cammini minimi successivi è un algoritmo riguardante il Min Cost Flow e mi permette di spostare una unità di flusso da un nodo ad un'altro per eliminare eventuali sbilanciamenti al minor costo possibile. Questo algoritmo è utilizzabile solo se esiste un cammino di costo negativo dal nodo che possiede una unità di flusso che voglio smaltire al nodo che ne possiede una in meno che potrebbe smaltire.

L'ammissibilità non è garantita poichè è possibile avere un arco di costo negativo sul quale l'algoritmo che costruisce il SPT potrebbe ciclare infinitamente, quindi la soluzione potrebbe non esistere, oppure potrebbe non esistere il cammino. Il cammino potrebbe non esistere perchè l'algoritmo SPT non riesce a raggiungere il nodo con sbilanciamento negativo e imposta la sua etichetta come +Infinito.

Hai un problema di programmazione lineare, se uno ti dice che è sicuramente vuoto, come si dimostra?

Per poter dimostrare che il problema in questione è vuoto basterebbe seguire l'algoritmo del simplesso duale associato e calcolare Eta-b ; se $\text{Eta-B} \leq 0$ allora il problema primale è vuoto.

Questo perché Eta-b è una direzione ammissibile di decrescita per il problema duale, che verrà estesa a \mathbb{R}^m , se Eta-b è minore o uguale a zero allora vuol dire che ho una direzione di decrescita illimitata risultando in un problema duale inferiormente illimitato. Questo causa il mio problema primale a essere vuoto.

Algoritmo dei cammini minimi aumentanti per il flusso massimo

Nel flusso massimo l'algoritmo dei cammini minimi aumentanti è l'algoritmo principale che si usa , anche perché il flusso massimo è un caso particolare del flusso minimo dove ogni arco ha costo zero.

L'algoritmo dei cammini minimi aumentanti genera un albero dei cammini minimi dal mio nodo sorgente fino al mio nodo di destinazione.

Se il cammino esiste allora posso mandare una quantità di flusso equivalente alla minima quantità di capacità rimasta negli archi del cammino.

Se il cammino non esista allora l'algoritmo crea un taglio del grafo N_s che è un insieme dove vengono inclusi tutti gli archi visitati dall'albero dei cammini minimi e il taglio N_t che è il resto del grafo.

La proprietà del taglio è la seguente: ogni arco concorde al taglio, cioè ogni arco orientato da $N_s \rightarrow N_t$ è saturo, mentre ogni arco discorde da $N_t \rightarrow N_s$ è vuoto.

La presenza di un taglio saturo certifica l'ottimalità della soluzione trovata.

Se le presento un problema di programmazione lineare in forma standard Scrivimi il duale

Perchè ci interessa il problema duale?

Il problema duale ci interessa perchè ci aiuta a verificare se esistono soluzioni ottime per il primale e a certificare che la soluzione ottima è effettivamente ottima.

**Sotto quali condizioni questa base ci risolve il problema primale? Quando una soluzione è ottima
(Condizioni scarti complementari)**

Parla del semplice duale, (applicazione del semplice partendo dal duale, viene data base ammissibile per il duale, quindi trovato x e y quindi si trova un indice k uscente (indice è minimo tra i vincoli in cui la soluzione))

Una soluzione del duale può essere negativa?

Non può essere negativa perchè nel problema duale ho un vincolo specifico che impone tutte le variabili ≥ 0 ;

**Ci sono cicli orientati di costo negativo dimostra perchè l'albero dei cammini minimi non esiste? (posso diminuire all'infinito le etichette del mio grafo per poi arrivare a destinazione, ma questo non si può fare)
(dimostrazione con condizioni di bellman)**

Le condizioni di bellman dicono che:

$$d[i] + c[i][j] \geq d[j]$$

Cioè se ho un arco di partenza i ed un nodo di destinazione j connessi da un arco di costo c allora sicuramente l'etichetta del nodo j sarà maggiore o uguale all'etichetta del nodo di partenza + il costo dell'arco. L'albero dei cammini minimi costruisce il grafo usando l'uguaglianza. Nel caso di un nodo di destinazione con etichetta più grande allora la condizione non è verificata e verrà ricostruita con l'uguaglianza.

Nel caso però di un ciclo di costo negativo, la condizione verrà sempre ricalcolata poichè ad ogni iterazione si troverà un valore minore dell'etichetta della destinazione. L'algoritmo non terminerà mai.

Il generico algoritmo per risolvere albero dei cammini minimi?

L'algoritmo SPT che è un algoritmo basato sulla visita "ad ampiezza" che parte da un nodo di partenza i con etichetta 0 e visita un grafo impostando l'etichetta dei nodi seguenti a [etichetta del parent] + [costo dell'arco tra il parent e il nodo]; Nel caso l'algoritmo riesca a vedere un nodo X con un'etichetta maggiore di quella che altrimenti avrei ottenuto dal nodo corrente allora il nodo corrente verrà assegnato al parent del nodo X e l'etichetta viene ricalcolata.

Data def di una funzione riscriverla minimizzata come pli?boh

L'algoritmo per cancellazione di cicli per il problema del flusso di costo minimo

(Intanto scrivi come è formulato il problema)(poi da cosa parte)

L'algoritmo di cancellazione di cicli è un algoritmo che mi permette di rendere un certo pseudoflusso x "minimale" cioè rendendo il suo costo minore possibile tramite l'eliminazione dei cicli di costo negativo.

Questo perché esiste un teorema che dice che se uno pseudoflusso x non è "minimale" allora esiste un ciclo di costo negativo da qualche parte, al contrario se esiste un ciclo di costo negativo allora non può essere minimale.

Per rendere x minimale basterebbe trovare tutti i cicli di costo negativo e inviare flusso su essi per poterli cancellare.

Se non trovo più cicli negativi allora ho finito.

Una volta fatto questo posso procedere a cercare i cammini minimi dai nodi con sbilanciamento positivo ai nodi con sbilanciamento negativo e posso star tranquillo che ogni cammino che trovo manterrà lo stato minimale del mio pseudoflusso.

Non esistono più cicli aumentanti di costo negativo, perchè sei convinto che questa sia la soluzione ottima del problema?

Parla del simplesso primale

(Enuncia l'algoritmo completo)

Il simplesso primale è un algoritmo di ottimizzazione formulato da George Dantzing negli anni 50 ed è formulato in questo modo:

Data una base del problema ammissibile, viene calcolato il vertice attuale x con coordinate $A_B^{-1}b_B$, poi viene calcolato il vettore delle $y = cA_B^{-1}$ e se questo vettore è ≥ 0 allora mi fermo e posso dire che il punto è ottimo.

Altrimenti esiste un elemento del vettore y che è negativo, l'indice di questo elemento diventa il mio indice uscente h .

Poi calcolo i generatori ξ del cono simpliciale formato dai due vincoli in base, calcolo il prodotto scalare tra il gradiente della mia funzione obiettivo " c " e questi generatori.

Calcolo il prodotto scalare tra le mie direzioni e tutti i vincoli non in base, se tutti i risultati sono minori o uguali a zero vuol dire che non esiste alcun vincolo che può fermare queste direzioni, perciò il problema è superiormente illimitato.

Prendendo in considerazione solo i risultati positivi (cioè concordi con " c " e quindi di crescita) posso calcolare il vettore dei massimi passi possibili che posso

seguire in quella direzione chiamato Lambda, calcolato con $(b_i - A_i x) / (A_i \xi_i)$ con $A_i \xi_i > 0$ e $i \in N$, cioè ai vincoli non in Base;

Prendendo il passo minimo tra questi risultati e vedendo il suo Indice non in base associato posso determinare il mio indice k che è il mio indice del gradiente entrante in base.

Tolgo h dalla base, ci aggiungo k e reitero.

Algoritmo dei cammini minimi successivi per il problema del flusso di costo minimo

(Prima scrivi la formulazione del problema poi spiega l'algoritmo)

(Ricorda vincolo conservazione del flusso)

Bene ora parla dell'algoritmo, cos'è uno pseudoflusso e da quale flusso parte l'algoritmo

Dato un grafo orientato e connesso, uno pseudoflusso è una funzione f che associa due nodi del grafo ad uno scalare, cioè $f : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Questa funzione rispetta determinate condizioni quali il vincolo della capacità, cioè se un arco connette i due nodi allora il flusso $f(u,v) \leq c(u,v)$ per ogni $u,v \in V$;

Uno pseudoflusso si dice ammissibile se rispetta la condizione della conservazione del flusso, cioè per ogni nodo il flusso entrante deve eguagliare quello uscente. Escludendo ovviamente la sorgente e il pozzo.

Parla del simplesso duale, definisci cosa fa(scrivi)

Il simplesso duale è un algoritmo usato per la risoluzione di problemi di ottimizzazione lineari. L'algoritmo duale è un problema simmetrico ad un problema "primale".

Domanda per salvarsi, scrivi il problema duale partendo dal primale.

Disegna un grafico, scrivi il problema primale(ha disegnato un poliedro non convesso quindi bisogna introdurre variabili binarie)

Algoritmo di kruskal, come funziona?

Perchè funziona?(i lati che inserisci soddisfano la condizione di ottimalità per tagli, gli archi scartati soddisfano la condizione di ottimalità per cicli ma spiega il perchè)

L'ottimalità per cicli assicura

Parla del teorema forte della dualità, un passo indietro parlami del teorema debole di dualità,

Parla del simplesso primale, scrivi cosa fa mentre spieghi

Algoritmo dei cammini aumentanti per il problema del flusso massimo.

(Prima def del problema poi funzionamento algoritmo)

Descrivi algoritmo del simplesso, cosa enuncia il teorema degli scarti complementari,

Algoritmo della cancellazione dei cicli per il problema del flusso di costo minimo.

(Prima enuncia il problema, poi descrivi l'algoritmo)

– algoritmo dei cammini minimi successivi

– per MCF conosciamo due algoritmi (cancellazione di cicli e cammini minimi successivi); per la PL anche (simplesso duale e primale). Secondo lei, gli algoritmi per MCF sono un "caso particolare" di quelli per la PL?

Quale tra i due per MCF è "il primale" e quale è invece "il duale"?

Astraendo quanto più possibile, si discutano le analogie tra gli algoritmi e si ricavi un "idea algoritmica generale".

Appello Invernale Dicembre 2024

Frangioni:

- Parlami del duale
- Spt implementato con lista complessità e funzionamento.
- Bellman dimostrazione.
- Algoritmo di Dijkstra complessità e implementazione.
- Scarti complementari cosa significano e perché ci interessano.

- Quando una base é duale ammissibile.
- Trasforma un duale in primale.
- Algoritmo del simplesso primale scrivi lo pseudocodice.
- Semplesso duale pseudocodice.
- Quando il primale é vuoto.
- Parla del problema del flusso massimo, come si risolve.
- Flusso massimo funzione obiettivo e vincoli.
- Cammini minimi succ. ([Preambolo pseudoflusso](#))
- Primale geometrico.
- (Domanda da 30) Come identificare una base duale ammissibile.
- Problema grafico: cosa vuol dire che una direzione é di crescita.
- Cosa vuol dire passo massimo.
- Quando un passo é ammisibile?
- Quale é l'insieme di tutte le direzioni ammissibili per x -barra? (Cono simpliciale)
- Algoritmo di cancellazione di cicli nel flusso di costo minimo.
- Algoritmo canc cicli, cosa deve avere il ciclo per interessare all'algoritmo.
- Traccia cosa fa l'algoritmo primale partendo da un disegno.
- Se ho un grafo con archi possibilmente negativi ho un algoritmo che termina? Spt.l.q
- Quale é la funzione obiettivo del KOMin Cost Flow, minimizzare la sommatoria dei costi per il flusso che ci passa sopra
- Min cost flow: quale é la funzione obiettivo?
- Quali sono i vincoli?
- Vincolo di conservazione del flusso.
- Algo cammini minimi successivi. Cosa si inizializza? ([Parto da uno pseudoflusso ammissibile, poi parto da un nodo con sbilanciamento positivo](#))

- Cosa comporta una base duale degenerare ne primale e viceversa?(Base primale degenerare --> condizione necessaria ma non sufficiente per provare la presenza di più soluzioni nel duale, base duale deg. -> stessa roba ma per il primale)
- Perché se ho una base duale degenerare **potrei** avere più soluzioni nel primale ? Inversamente, perché se non è degenerare allora è unica?
- Teorema debole della dualità?
- Teorema forte.
- Condizione degli scarti complementari.
- Algoritmo dei cammini minimi succ.
- Cosa é uno pseudoflusso?
- Cosa é uno pseudoflusso minimale?
- Quando é minimale?
- Cosa é il grafo residuo?
- Definizione di direzione ammissibile per un punto x.
- Definizione di rilassamento.(Regione più grande che contiene quella vecchia)
- La funzione obiettivo cambia quando uso un rilassamento?
- Definizione di cono poliedrico.($Ax \leq b$ ma i "b" son tutti 0)
- Cosa é un poliedro?
- Definizione di cono recessivo.
- Cosa é un cono finitamente generato?
- Min cost flow: caratterizzazione del problema (funzione obiettivo, vincoli)
- Come é implementata la funzione "Inizializza(G,b,u)" dell'algoritmo "Cancella Cicli"