

Esercizio 1. In ciascuno dei casi seguenti, determinare se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e se il vettore v è combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3 . Nel caso affermativo calcolare le coordinate.

$$\begin{aligned} a) \quad v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \\ b) \quad v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} \\ c) \quad v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 2. (Problema di compito recente) Per quali valori del parametro a le matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali?

Esercizio 3. (Problema di compito recente)

(1) Per quali valori del parametro reale a i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti?

(2) Stessa domanda per i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. (Problema di compito recente) Si considerino i seguenti vettori di \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(1) I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti oppure no?

(2) Estrarre una base di $V = \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ dal sistema di vettori v_1, v_2, v_3 .