Appello di Algebra Lineare
16 gennaio 2024

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso: ....
(Mettere VO come corso se vecchio ordinamento.)

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere <u>**TASSATIVAMENTE**</u> nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro k in $\mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2k-4 & k+1 & 4 & k \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Al variare di k, determinare gli autovalori con molteplicità algebrica esattamente pari a 2.
(2) Determinare se la matrice A è diagonalizzabile per $k = 2$.

Risposte. (1) 4 e 6 per $k = 3$, e 4 per tutti i k diversi da 2 e 3. Ad esempio usando Laplace per la prima riga di $A - tI_4$ (dove I_4 è la matrice identità di taglia 4×4), si calcola facilmente il polinomio caratteristico $p_A(t) = \det(A - tI_4)$ di A e si ottiene $(2k-t)(4-t)^2(6-t)$. Quindi per $k = 3$ ci sono esattamente due autovalori di molteplicità algebrica 2, ovvero 4 e 6. Per $k = 2$ non c'è nessun autovalore di molteplicità algebrica 2. Mentre per tutti i valori di k diversi da 2 e 3 si ha esattamente un autovalore di molteplicità algebrica 2, ovvero 4.
(2) Per $k = 2$ la matrice A non è diagonalizzabile. Infatti, per $k = 2$ gli autovalori sono 4 di molteplicità algebrica 3 e 6 di molteplicità algebrica 1. Calcolando la molteplicità geometrica di 4 si trova 2, che è strettamente minore di 3.

Risposta (1)

Risposta (2)

Esercizio 2. Sia $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali; si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e si considerino le applicazioni lineari

$$L\colon V \to V, \quad L(X) = AX, \quad R\colon V \to V, \quad R(X) = XA.$$

(1) Determinare una base del nucleo di L.
(2) Determinare una base del nucleo di R.
(3) Determinare le dimensioni di $\ker L \cap \ker R$ e $\ker L + \ker R$.

Risposte. (1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. Infatti nella base ordinata di $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la trasformazione lineare L ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da questo, usando l'algoritmo di Gauss, si calcola facilmente che una base del kernel di L è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. Similmente al punto (1), nella base ordinata E_1, E_2, E_3, E_4 la trasformazione lineare R ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si calcola che una base di $\ker R$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(3) $\dim(\ker L \cap \ker R) = 1$ e $\dim(\ker L + \ker R) = 3$. Infatti, nella notazione del punto (1), data una generica matrice X di V nella forma $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$, la condizione $L(X) = AX = 0 \in V$ si traduce nel sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases},$$

dunque $\ker L$ è determinato dall'insieme delle soluzioni di questo sistema. Similmente, $R(X) = XA = 0 \in V$ si traduce nel sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases},$$

dunque $\ker R$ è determinato dall'insieme delle soluzioni di questo sistema. Pertanto $\ker L \cap \ker R$ è determinato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo, si ottiene che $\ker L \cap \ker R$ è il sottospazio generato da $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, e ha dunque dimensione 1.

Ora per la formula di Grassmann

$$\dim(\ker L + \ker R) = \dim(\ker L) + \dim(\ker R) - \dim(\ker L \cap \ker R) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

- $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e_2}$;
- $T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$;
- $T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$,

dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ sono i tre vettori della base standard di $\mathbb{R}^3$.

(1) Determinare la matrice di T rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ in partenza e in arrivo.

(2) Determinare la matrice di T rispetto alla base ordinata standard $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in partenza e in arrivo.

Risposte. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Infatti, calcolando

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2) = T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) - T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Risposta (1)	Risposta (2)

Esercizio 4. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x+y-2z=0$, e sia $v = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix}$.

(1) Determinare un vettore w di V tale che $\{v, w\}$ sia una base ortonormale di V (rispetto al prodotto scalare euclideo).
(2) Determinare un vettore del complemento ortogonale di V di norma 9.

Risposte. (1) $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$. Infatti, innanzitutto si verifica immediatamente che v ha norma 1 e che appartiene a V. Si calcola poi facilmente che i vettori di V sono esattamente i vettori della forma $u = y\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ al variare di y e z in $\mathbb{R}$. Imponendo la condizione per u di essere ortogonale a v (rispetto al prodotto scalare euclideo $\langle -, - \rangle$), ossia $\langle u, v \rangle = 0$, si ottiene la condizione $y = 0$. Dunque i vettori di V ortogonali a v sono esattamente i multipli di $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (alternativamente si poteva osservare immediatamente che questo vettore è ortogonale a v). Per ottenere un vettore di V ortonormale a v basta prendere tra questi un vettore di lunghezza 1, ad esempio $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (l'altra possibilità è $-w$).

(2) $\begin{bmatrix}6\\3\\-6\end{bmatrix}$. Infatti, il complemento ortogonale di V è dato dai multipli del vettore $\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$: questo si può vedere direttamente, poichè il vettore dei coefficienti dell'equazione di un piano di $\mathbb{R}^3$ è sempre un vettore ortogonale al piano, e, siccome il piano ha dimensione 2, il complemento ortogonale deve avere necessariamente dimensione 1 ($\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$); oppure, partendo da una base di V, ad esempio $\left\{\begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ (calcolata nel punto (1)), si impone che il generico vettore $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ sia ortogonale a entrambi i vettori della base, ottenendo un sistema le cui soluzioni ci danno proprio i vettori del complemento ortogonale di V. Ora si calcola che il vettore $\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$ ha norma 3, dunque $3\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\3\\-6\end{bmatrix}$ ha norma 9 (l'altra possibilità è il suo opposto).

Risposta (1)	Risposta (2)