Appello di Algebra Lineare

31 agosto 2023

Esercizio 1. Siano $v = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{bmatrix}$ due vettori in $\mathbb{R}^3$, dove a e b sono parametri reali. Decidere se gli enunciati seguenti sono veri o falsi. [Scrivere SI nell'apposito riquadro se l'enunciato è vero e NO se falso. Motivare la risposta in ogni caso.]

(1) Esiste un solo valore del parametro a per cui i vettori v e w possono essere ortogonali.
(2) Esistono un solo valore del parametro a e un solo valore del parametro b per cui i vettori v e w sono ortogonali.
(3) Esistono un solo valore del parametro a e un solo valore del parametro b per cui i vettori v e w sono linearmente dipendenti.

Risposte

(1) Sì. Il prodotto scalare tra v e w è
$$v \cdot w = 2 + 3a.$$
Esiste quindi un solo valore di a per cui $v \cdot w = 0$, cioè $a = -\frac{2}{3}$.
(2) No. Per $a = -\frac{2}{3}$ e b qualunque i vettori sono ortogonali.
(3) Sì. v e w sono linearmente dipendenti se uno dei due è multiplo dell'altro; considerando la prima entrata, vediamo che sono linearmente dipendenti se e solo se $w = 2v$, cioè
$$\begin{cases} 3 = 2a \\ b = 0 \end{cases}$$
Il sistema ha una sola soluzione, cioè $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

a) Per quali valori del parametro b la matrice A ha due autovalori uguali?
b) Per quali valori di b la matrice A è diagonalizzabile?

Risposte

(1) Per $b = 0, 2$. Infatti il polinomio caratteristico è
$$(b-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (b-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = (b-\lambda)\lambda(\lambda - 2).$$
Gli autovalori (contati con molteplicità) sono quindi $b, 0, 2$. Si hanno due autovalori uguali quando $b = 0$ o $b = 2$.

(2) Per $b \neq 2$.

Infatti, se $b \neq 0, 2$ la matrice A ha tre autovalori distinti in $\mathbb{R}$; essendo una matrice 3×3, è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Se $b = 0$, l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica due, e l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica uno. La molteplicità geometrica di 0 è
$$\dim\ker A = \dim\ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \dim\ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$
La molteplicità geometrica di 2 è uno, perchè è strettamente positiva e non può superare la molteplicità algebrica. Quindi in questo caso A ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ e le molteplicità geometriche e algebriche coincidono; perciò, è diagonalizzabile.

Se $b = 2$, l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica due, e l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica uno. La molteplicità geometrica di 2 è
$$\dim\ker(A - 2I) = \dim\ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \dim\ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$
Quindi molteplicità algebriche e geometriche non coincidono e A non è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$$

e sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = 3x + 2y + 5z.$$

(1) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $V + W$.
(2) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $V \cap W$.
(3) Trovare una base di $V \cap W$.

Risposte

(1) $\dim V + W = 3$. Infatti, si vede facilmente che i generatori indicati di V sono linearmente indipendenti, quindi $\dim V = 2$.

Inoltre W è il nucleo della matrice di rango uno $\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\end{bmatrix}$, quindi $\dim W = 2$.

Lo spazio $V + W$ può avere dimensione due o tre, a seconda che V e W coincidano o no.

Per verificare se $V = W$ è sufficiente verificare se la restrizione di f a V è zero; calcolando f sui generatori di V troviamo

$$f\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = -3 + 2 = -1, \quad f\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = -3 + 5 = 2.$$

Quindi V non coincide con W e $V + W = \mathbb{R}^3$.

Si può ottenere la stessa conclusione calcolando una base di W, diciamo

$$W = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\0\\3\end{bmatrix}\right\},$$

e osservando che la matrice

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -2 & -5\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

ha rango 3.

(2) La formula di Grassmann dà

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

(3) Una base di $V \cap W$ è data da

$$\left\{\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Infatti, poichè W è definito dalla singola equazione $f = 0$, l'intersezione $V \cap W$ è l'insieme dei vettori $v \in V$ tali che $f(v) = 0$, cioè

$$V \cap W = \left\{ v = a\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \mid f(v) = 0 \right\}.$$

Per linearità e per il calcolo precedente,

$$f(v) = a\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = -a + 2b,$$

quindi $f(v) = 0$ se e solo se $a = 2b$, cioè

$$v \in \operatorname{Span}\left\{ 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esercizio 4. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ costituito delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

a) Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ è contenuta nello Span delle matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare che manda le matrici della base standard

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di V rispettivamente in

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{bmatrix}.$$

Per quali valori del parametro a l'applicazione f ha nel nucleo solo la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

Risposte

(1) $a = 0$. La matrice indicata è nello spazio generato se il seguente sistema ha soluzione:

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ 0 = a \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Scrivendo la matrice completa del sistema e effettuando la riduzione di Gauss troviamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$

Si vede pertanto che esiste una soluzione se e solo se $a = 0$.

(2) $a \neq 0$. Infatti $\ker f$ consiste della sola matrice banale quando $\dim \ker f = 0$. Essendo $\dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f$, questo equivale a $\dim \operatorname{Im} f = 4$.

L'immagine di f è generata dalle matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\dim \operatorname{Im} f = 4$ se e solo se le matrici sono linearmente indipendenti; il calcolo del punto precedente mostra che questo accade esattamente per $a \neq 0$.