Appello di Algebra Lineare
5 Giugno 2023

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso: ....
(Mettere VO come corso se vecchio ordinamento.)

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1.

(1) Trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo di equazioni lineari

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

(2) Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$ dove (b_1, b_2, b_3, b_4) sono tali che il sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= b_1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= b_2 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + 3x_5 &= b_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 &= b_4 \end{aligned}$$

ammette almeno una soluzione.

Risposta (1)	Risposta (2)

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali. Sia $\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ l'applicazione lineare data da

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(x) = 1 - x + x^2, \quad \varphi(x^2) = 2 + 2x - x^2.$$

(1) Qual è la dimensione di $\mathrm{Im}(\varphi)$?
(2) Qual è la dimensione di $\mathrm{Ker}(\varphi)$?
(3) Per quale $k \in \mathbb{R}$ si ha che $12 + 8x + kx^2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$?

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 3. Sia $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali 2×2 e sia $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice di f rispetto alla base standard

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(2) Calcolare gli autovalori di f e le loro molteplicità algebriche.

(3) Determinare se f è diagonalizzabile, e nel caso affermativo esibire una base di autovettori. Altrimenti scrivere NO nell'apposito riquadro. (Attenzione, gli autovettori sono matrici in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$!)

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 4. Si considerino $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard ed il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ definito dal sistema di equazioni

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 \qquad &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

(1) Trovare un vettore v che soddisfa *tutte* le seguenti condizioni:
- $v \in V$;
- v è di norma $\sqrt{6}$;
- v è ortogonale al vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(2) Esibire una base dello spazio ortogonale $V^{\perp}$.

(3) Trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $V + W = \mathbb{R}^4$ e $V \cap W = \mathrm{Span}(v)$, dove v è il vettore trovato sopra. (Ad esempio esibire una base di W.)

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Risposte

Risposte Esercizio 1.

(1) Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice dei coefficienti del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dunque le soluzioni del sistema sono i vettori del sottospazio

$$W = \left\{ \left(x_4 + \frac{8}{3}x_5, -x_4 - \frac{1}{3}x_5, -x_4 - 2x_5, x_4, x_5 \right) \mid x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\},$$

e una base di W è $\{(1, -1, -1, 1, 0), (8, -1, -6, 0, 3)\}$.

(2) Il sottospazio considerato è l'immagine della trasformazione lineare associata alla matrice A del punto precedente. Al punto (1) abbiamo visto che applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice A si trovano 3 pivots, dunque 3 è la dimensione cercata. Alternativamente, siccome al punto (1) abbiamo trovato una base del kernel costituita da due elementi, per la formula della dimensione abbiamo che la dimensione cercata è $\dim(\mathbb{R}^5) - 2 = 5 - 2 = 3$.

Risposte Esercizio 2.

Nella base ordinata $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ in partenza e in arrivo φ ha matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usando l'eliminazione di Gauss troviamo due pivots, dunque $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$. Alternativamente, $\{1, x, x^2\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, e $\varphi(x)$ e $\varphi(x^2)$ sono chiaramente linearmente indipendenti, dunque la dimensione di $\mathrm{Im}(\varphi)$ deve essere 2.

(2) Abbiamo visto al punto (1) che $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$, dunque per la formula della dimensione

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3 - 2 = 1.$$

(3) Lavorando in coordinate nella base ordinata $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, il problema si riduce a cercare i $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 12 \\ -\alpha + 2\beta &= 8 \\ \alpha - \beta &= k \ . \end{aligned}$$

Usando l'eliminazione di Gauss, si ottiene che il sistema ha soluzione se e solo se $k = -3$.

Risposte Esercizio 3.

Osservando che

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la matrice di f nella base ordinata suggerita è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Il polinomio caratteristico della matrice A è $\det(A - \lambda I) = (x - 1)^2(x + 1)^2$, dunque f ha autovalori 1 e -1, entrambi di molteplicità algebrica 2.

(3) Per il teorema spettrale, la matrice è diagonalizzabile in quanto simmetrica. Una base dell'autospazio associato all'autovalore 1 è $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, mentre una base dell'autospazio associato all'autovalore -1 è $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$. Dunque la loro unione è una base di autovettori di f.

Risposte Esercizio 4.

(1) Usando l'eliminazione di Gauss si trova che $\{(-5,-1,1,0),(1,1,0,2)\}$ è una base di V. Un vettore di V è dunque della forma $\alpha(-5,-1,1,0)+\beta(1,1,0,2) = (-5\alpha+\beta, -\alpha+\beta, \alpha, 2\beta)$ e per essere ortogonale al vettore $(0,2,0,-1)$ deve soddisfare l'equazione

$$0 \cdot (-5\alpha+\beta) + 2 \cdot (-\alpha+\beta) + 0 \cdot \alpha + (-1) \cdot 2\beta = -2\alpha = 0,$$

dunque $\alpha = 0$, e quindi i vettori $\beta(1,1,0,2)$ soddisfano questa condizione. Ora per avere anche norma $\sqrt{6}$ possiamo prendere ad esempio $\beta = 1$, e quindi il vettore $v = (1,1,0,2)$ soddisfa tutte le condizione richieste.

(2) Data la base trovata al punto (1), lo spazio ortogonale $V^\perp$ è l'insieme dei vettori $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ che sono soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Usando l'eliminazione di Gauss si trova che $\{(1,-1,4,0),(1,-5,0,2)\}$ è una base di $V^\perp$. Alternativamente, dalle equazioni che definiscono V, si vede che i vettori dei coefficienti delle equazioni, ossia $(1,-1,4,0)$ e $(1,-3,2,1)$, sono in $V^\perp$, sono chiaramente linearmente indipendenti, e dunque, poiché $\dim(V^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(V) = 4-2 = 2$, formano una base di $V^\perp$.

(3) Si puó prendere ad esempio $W = V^\perp + \mathrm{Span}(v)$, che è una somma diretta, visto che $v \in V$, una cui base è data dall'unione (necessariamente disgiunta) di una base di $V^\perp$, ad esempio $\{(1,-1,4,0),(1,-5,0,2)\}$ (vedi punto (2)), e $\{v\} = \{(1,1,0,2)\}$ (vedi punto (1)).