Appello di Algebra Lineare
8 Maggio 2023

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1) Mostrare che 1 è un autovalore di A, e trovare una base del suo autospazio.

(2) Mostrare che $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore di A, e calcolare l'autovalore associato.

(3) La matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? (Scrivere SI o NO nell'apposito riquadro e motivare la risposta.)

[L'esercizio si può risolvere anche senza calcolare il polinomio caratteristico di A.]

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 2. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Sia inoltre $T : V \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(1) È possibile determinare da queste condizioni le dimensioni di $\mathrm{Ker}(T)$ e di $\mathrm{Im}(T)$? Se sì, farlo. Se no, mettere NO nell'apposito riquadro. Motivare la risposta in ogni caso.

(2) È possibile determinare da queste condizioni $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$? Se sì, farlo. Se no, mettere NO nell'apposito riquadro. Motivare la risposta in ogni caso.

(3) Trovare, se possibile, un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $T(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Se non è possibile, mettere NO nell'apposito riquadro. Motivare la risposta in ogni caso.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 3. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni (x, y, z, w) del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + z - w = 0 \\ x - y + 2z + w = 0 \end{cases} .$$

(1) Determinare una base dello spazio V.
(2) Determinare una base dello spazio ortogonale $V^\perp$.
(3) Determinare la dimensione dell'intersezione di V col sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 4. Si considerino lo spazio vettoriale $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ delle matrici 3×3 reali ed i suoi sottospazi

$$U := \left\{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \; A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$V := \left\{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ è autovettore di } A \right\}.$$

(1) Calcolare la dimensione di U.
(2) Calcolare la dimensione di V.
(3) Calcolare la dimensione di $U + V$.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Risposte

Risposte Esercizio 1.

(1) La matrice A ammette 1 come autovalore se e solo se $\mathrm{Ker}(A-I)$ ha dimensione positiva, e in tal caso $\mathrm{Ker}(A-I)$ è proprio l'autospazio corrispondente. Dunque applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice $A-I$ otteniamo l'unica equazione $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ che descrive $\mathrm{Ker}(A-I)$, dunque $\mathrm{Ker}(A-I)$ ha dimensione 3 e una sua base è $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

(2) Si calcola

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\5\\5\\5\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

quindi $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ è un autovettore di A con autovalore associato 5.

(3) Per il teorema spettrale, la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ poiché è simmetrica. Alternativamente, nei punti (1) e (2) abbiamo trovato 4 autovettori di A indipendenti: infatti per il punto (1) l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 3, e per il punto (2) 5 ha molteplicità geometrica (almeno) 1. Dunque abbiamo una base di autovettori di A.

Risposte Esercizio 2.

(1) Per ipotesi sappiamo che i vettori $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ sono in $\mathrm{Im}(T)$. Poiché sono linearmente indipendenti, sono necessariamente una base di $\mathbb{R}^2$, dunque $\mathrm{Im}(T)=\mathbb{R}^2$ e quindi $\dim \mathrm{Im}(T)=2$. Per la formula della dimensione abbiamo $\dim\mathrm{Ker}(T) = \dim V - \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V - 2$. Si verifica facilmente (ad esempio con l'algoritmo di Gauss) che i generatori di V dati sono linearmente indipendenti, dunque V ha dimensione 3, e quindi $\dim \mathrm{Ker}(T) = 3-2 = 1$.

(2) Abbiamo osservato al punto (1) che i tre generatori dati formano una base di V. Dall'ipotesi conosciamo solo l'immagine di due di questi vettori, quindi dalla teoria sappiamo che per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$ esiste una trasformazione lineare (unica) che manda $\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}$ in v. Dunque $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}\right)$ non può essere dedotto dai dati del problema.

(3) Si osserva immediatamente che

$$\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}2\\-2\\-2\\0\end{bmatrix}\right)$$

dunque $\begin{bmatrix}2\\-2\\-2\\0\end{bmatrix}$ soddisfa le richieste.

Risposte Esercizio 3.

(1) Usando l'algoritmo di Gauss si trova $V = \{(-z+w, z+2w, z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}^4\}$ dunque una base di V è data da $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

(2) Usando la base trovata al punto (1), sappiamo che $V^\perp$ è lo spazio dei vettori di $\mathbb{R}^4$ ortogonali ai due vettori della base del punto (1), dunque $V^\perp$ è lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x+2y+w=0 \end{cases}.$$

Usando l'algoritmo di Gauss si trova facilmente che $V^\perp = \{(2z-w, -z-w, 3z, 3w) \mid z, w \in \mathbb{R}^4\}$, dunque una base di $V^\perp$ è data da $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. Alternativamente, abbiamo visto in classe che $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, quindi, poiché per il punto (1) $\dim V = 2$, deduciamo che $\dim V^\perp = 2$. D'altra parte dalla definizione di V i due vettori indipendenti $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono contenuti in $V^\perp$, quindi ne formano una base.

(3) Per la formula di Grassmann, $\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V+W)$. Abbiamo visto al punto (1) che V ha dimensione 2, e si verifica facilmente che i generatori di W dati formano una base di W, dunque W ha dimensione 2. Ci resta da calcolare $\dim(V+W)$: chiaramente $V+W$ è generato dall'unione di una base di V con una di W. Usando la base di V trovata al punto (1), troviamo che

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

genera $V+W$. Ora l'algoritmo di Gauss ci dice facilmente che i primi tre vettori formano una base di $V+W$. Dunque $\dim(V \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Risposte Esercizio 4.

(1) Denotando con $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$ un elemento generico di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, notiamo che U è determinato dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \\ z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$

che ha chiaramente 6 variabili libere, dunque $\dim U = 6$.

(2) Moltiplicando un generico elemento di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ (vedi punto (1)) per $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ otteniamo $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, dunque affinché $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sia un autovettore di tale elemento è necessario e sufficiente che $y_1 = z_1 = 0$. Questo è un sistema con 7 variabili libere, dunque V ha dimensione 7.

(3) Sappiamo dalla formula di Grassmann che $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$. Dati i punti (1) e (2), ci rimane da calcolare $\dim(U \cap V)$. Questa intersezione è determinata dal sistema

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \\ z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$

che ha 4 variabili libere, dunque $\dim(U \cap V) = 4$. Pertanto $\dim(U+V) = 6+7-4 = 9$ (dunque $V + W = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$).