Appello di Algebra Lineare
10 Luglio 2023

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso: ....
(Mettere VO come corso se vecchio ordinamento.)

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1.
Al variare del parametro reale k, si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ k-1 & k & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare i valori di k per cui A_k ha un autovalore con molteplicità algebrica 2. [*Aiuto*: ce ne sono 2.]
(2) Determinare i valori di k per cui A_k ha un autovalore con molteplicità geometrica 2.
(3) Determinare i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Soluzione. 1) Il polinomio caratteristico di A_k è $P_{A_k}(t) = (1-t)[(2-t)^2 - k]$. Per $k = 0$ la radice 2 ha molteplicità 2, altrimenti il fattore $(2-t)^2 - k$ ammette due radici (reali o complesse) distinte. Ma $P_{A_k}(t)$ può ammettere una radice di molteplicità 2 anche nel caso dove 1 è radice di $(2-t)^2 - k$, quindi per $k = 1$. Risposta finale: $k = 0, 1$.

2) Poiché la molteplicità geometrica non può essere superiore a quella algebrica, dopo 1) dobbiamo considerare solo i casi $k = 0, 1$. Calcolando gli autovettori si vede che per $k = 0$ l'autovalore 2 ha molteplicità geometrica 1, mentre l'autovalore 1 nel caso $k = 1$ ha molteplicità geometrica 2. Risposta finale: $k = 1$.

3) Dopo 2) nel caso $k = 0$ esiste un autovalore con molteplicità geometrica diversa da quella algebrica, quindi A_0 non è diagonalizzabile. Invece A_1 sì: le molteplicità algebriche e geometriche dei due autovalori sono uguali (2 per l'autovalore 1, 1 per 3). Negli altri casi A_k ammette 3 autovalori distinti su $\mathbb{C}$, quindi è diagonalizzabile. Risposta finale: $k \neq 0$.

Risposta (1) Risposta (2) Risposta (3)

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali. Sia $\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ l'applicazione lineare data da

$$\varphi(x+1) = x^2, \quad \varphi(x-1) = x, \quad \varphi(x^2) = 1.$$

(1) Determinare la matrice associata a φ rispetto alla base $\{x+1, x-1, x^2\}$ in partenza e in arrivo.
(2) Determinare la matrice associata a φ rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ in partenza e in arrivo.
(3) Determinare se esiste una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dove la matrice di φ ha determinante 0. (Scrivere SI o NO nell'apposito riquadro e motivare la risposta.)

Soluzione. 1) Prima di tutto si osserva che:
- le coordinate di x^2 rispetto alla base $\{x+1, x-1, x^2\}$ sono $(0, 0, 1)$;
- le coordinate di x rispetto alla base $\{x+1, x-1, x^2\}$ sono $(1/2, 1/2, 0)$;
- le coordinate di 1 rispetto alla base $\{x+1, x-1, x^2\}$ sono $(1/2, -1/2, 0)$.

1) Utilizzando il calcolo sopra e la definizione della matrice associata rispetto ad una base in partenza e arrivo si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Dopo il calcolo sopra si ha

$$\varphi(1) = (1/2)\varphi(x+1) - (1/2)\varphi(x-1) + 0 \cdot \varphi(x^2) = (1/2)x^2 - (1/2)x,$$

$$\varphi(x) = (1/2)\varphi(x+1) + (1/2)\varphi(x-1) + 0 \cdot \varphi(x^2) = (1/2)x^2 + (1/2)x,$$

$$\varphi(x^2) = 0 \cdot \varphi(x+1) + 0 \cdot \varphi(x-1) + 1 \cdot \varphi(x^2) = 1.$$

La matrice risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Il determinante non dipende dalla scelta della base e si calcola facilmente che entrambe le matrici hanno determinante $-1/2$.

Alternativamente, si osserva che $\mathrm{Im}(\varphi)$ contiene $1, x, x^2$, quindi $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$. Ma allora la matrice di φ rispetto ad una qualsiasi base ha rango 3 e quindi determinante diverso da 0. Risposta finale: NO.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 3. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x+t=0 \\ y+z=0 \end{cases} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x-2z+t=0 \\ y-3t=0 \\ x+2y-3t=0 \end{cases} \right\}.$$

(1) Determinare una base di U e una base di W,costituite di vettori da cui almeno una coordinata è uguale a 1.

(2) Determinare le dimensioni di $U^\perp + W$ e $U^\perp \cap W$, dove $U^\perp$ è il sottospazio ortogonale di U rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^4$.

(3) Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che contiene sia una base di U che una base di W? In caso affermativo determinarla; in caso negativo motivare la risposta.

1) Utilizzando l'algoritmo di Gauss si trovano le basi $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ per U e $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ per W.

2) Il sottospazio $U^\perp$ è costituito dai vettori ortogonali a v_1 e v_2, quindi dalle soluzioni comuni delle equazioni $x - t = 0$, $y - z = 0$. Poiché w non soddisfà queste equazioni, si ha $U^\perp \cap W = \{0\}$ e quindi $\dim U^\perp \cap W = 0$. La formula di Grassmann dà allora $\dim(U^\perp + W) = \dim U^\perp + \dim W - 0 = 2 + 1 = 3$.

3) Una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che contiene una base di U è l'unione di una base ON di U e una base ON di $U^\perp$. Poiché $w \notin U^\perp$ per il punto 2) e $w \notin U$ (perchè non soddisfà le equazioni di U), una tale base non può contenere nessun vettore di W. Dunque la risposta è NO.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 4. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k & 6k \\ -3 & 3+3k & 3+9k \\ 1 & -k-1 & -1-3k \end{pmatrix}$$

(1) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare il rango di B_k.
(2) Determinare i valori di k per cui $\operatorname{Ker} B_k \cap \operatorname{Im} B_k = \{0\}$.

Soluzione. 1) Tramite l'algoritmo di Gauss la matrice si trasforma in forma a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & -k-1 & -1-3k \\ 0 & 2k & 6k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq 0$ abbiamo 2 pivots (1 e $2k$), quindi il rango è 2. Per $k = 0$ abbiamo solo un pivot, quindi il rango è 1.

2) La matrice sopra per $k = 0$ diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi il nucleo di B_0 è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. D'altra parte, $\operatorname{Im} B_0$ è costituita dai multipli della prima colonna $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ di B_0. Questi vettori non soddisfano l'equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, tranne il vettore nullo, quindi per $k = 0$ si ha $\operatorname{Ker} B_k \cap \operatorname{Im} B_k = \{0\}$.

Per $k \neq 0$ il sottospazio $\operatorname{Ker} B_k$ è costituito dai vettori che soddisfano le equazioni $x_1 - (k+1)x_2 - (1+3k)x_3 = 0$ e $2kx_2 + 6kx_3 = 0$, quindi $x_2 = -3x_3$ e $x_1 = -2x_3$. Dunque il nucleo $\operatorname{Ker} B_k$ è costituito dai multipli del vettore $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; d'altra parte, $\operatorname{Im} B_k$ è lo Span delle prime due colonne di B_k che sono $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 2k \\ 3+3k \\ -k-1 \end{pmatrix}$. Poiché $\dim \operatorname{Ker} B_k = 1$ e $\dim \operatorname{Im} B_k = 2$, dopo la formula di Grassmann si ha $\operatorname{Ker} B_k \cap \operatorname{Im} B_k = \{0\}$ se e solo se $\dim(\operatorname{Ker} B_k + \operatorname{Im} B_k) = 3$. Questo vale se e solo se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Ma un altro argomento facile con l'algoritmo di Gauss mostra che questi 3 vettori sono sempre linearmente dipendenti; infatti si può anche osservare $v_2 = -kv_1 - v_3$.

Risposta finale: solo per $k = 0$.

Risposta (1)

Risposta (2)