Algebra Lineare
13 maggio 2024

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso: ....
(Mettere VO come corso se vecchio ordinamento.)

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Consideriamo l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alle basi standard è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare gli autovalori di A.
(2) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi A.

Risposte. (1) 4, -1 e -2. Infatti si calcola facilmente il polinomio caratteristico $p_A(t) = \det(A - tI_3) = -(t-4)(t+1)(t+2)$ di A.

(2) $\{(1/\sqrt{5}, 0, -2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5}), (0, 1, 0)\}$.

Infatti, usando l'algoritmo di Gauss, si trova che gli autospazi di 4, -1 e -2 sono rispettivamente $V_4 = \{x(1,0,-2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $V_{-1} = \{x(1,0,1/2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $V_{-2} = \{x(0,1,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Poiché la matrice A è simmetrica, sappiamo dalla teoria che questi spazi sono ortogonali tra loro, quindi basta scegliere per ognuno un vettore di norma 1 per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A, che ovviamente diagonalizza A.

(2)

(1)

Esercizio 2. Nello spazio $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ delle matrici 3×3 reali consideriamo i sottospazi

$$U = \{\text{matrici con la terza riga uguale a } (0,0,0)\}$$

e

$$V = \{\text{matrici con la prima riga uguale alla terza colonna}\}.$$

(1) Calcolare la dimensione di U.
(2) Calcolare la dimensione di V.
(3) Calcolare la dimensione di $U \cap V$.
(4) Calcolare la dimensione di $U + V$.

Risposte. (1) 6. Infatti le matrici in U sono le matrici della forma $\begin{pmatrix} a & b & g \\ c & d & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d, g, h \in \mathbb{R}$, dunque costituiscono un sottospazio di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ di dimensione 6.

(2) 6. Infatti le matrici in V sono le matrici della forma $\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & b \\ e & f & a \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, dunque costituiscono un sottospazio di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ di dimensione 6.

(3) 3. Infatti, visti i punti (1) e (2), è ora chiaro che le matrici in $U \cap V$ sono le matrici della forma $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & d & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $b, c, d \in \mathbb{R}$, dunque costituiscono un sottospazio di $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ di dimensione 3.

(4) 9. Infatti, visti i punti (1), (2) e (3), usando la formula di Grassmann, si ha $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 6 + 6 + 3 = 9$.

(1)	(2)	(3)	(4)

Esercizio 3. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alle basi standard è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare la dimensione di $\mathrm{Im}\,(L_A)$.
(2) Determinare la dimensione di $\mathrm{Ker}\,(L_A)$.
(3) Per quali valori del parametro a si ha che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ NON è contenuto in $\mathrm{Im}\,(L_A)$?

Risposte. (1) 3. Infatti, applicando l'algoritmo di Gauss alla matrice A si ottiene la matrice in forma a scalini ridotta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché ci sono 3 pivots, la dimensione di $\mathrm{Im}\,(L_A)$ è 3.

(2) 2. Infatti dal punto (1) sappiamo che $\dim(\mathrm{Im}\,(L_A)) = 3$, dunque per la formula della dimensione $\dim(\mathrm{Ker}\,(L_A)) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\mathrm{Im}\,(L_A)) = 5 - 3 = 2$.

(3) Per $a \neq 2$. Infatti dal punto (1), deduciamo che le prime 3 colonne di A formano una base di $\mathrm{Im}\,(L_A)$, poiché i 3 pivots sono nelle prime 3 colonne. Dunque il vettore $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ NON è contenuto in $\mathrm{Im}\,(L_A)$ se e solo se le colonne della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & a \end{pmatrix}$ ottenuta mettendo nelle prime 3 colonne la base di $\mathrm{Im}\,(L_A)$ trovata, e nell'ultima colonna il vettore v sono linearmente indipendenti. Si calcola facilmente che il determinante di questa matrice è $6-3a$, quindi è diverso da 0 per $a \neq 2$. Alternativamente, la matrice sopra si può mettere in forma a scalini e si vede che nella forma a scalini l'ultima colonna contiene un pivot se e solo se $a \neq 2$.

(1)	(2)	(3)

Esercizio 4. Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare la matrice di F rispetto alla base standard in partenza e arrivo.

(2) Determinare tutti i vettori $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$(F \circ F)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Risposte. (1) $\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}$.

(2) C'è solo $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Infatti la matrice trovata al punto (1) ha determinante 1, quindi è invertibile. (Alternativamente, si vede che $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}^2$.) Dunque F è invertibile, e quindi lo sarà anche $F \circ F$. Pertanto l'unico vettore di $\mathbb{R}^2$ mandato in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ da $F \circ F$ è $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

(1)

(2)