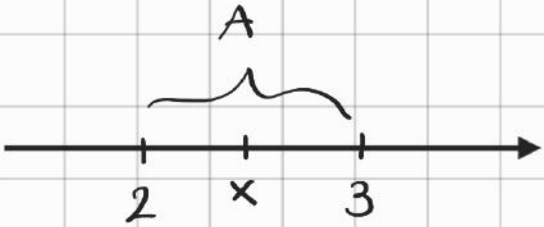
Analisi

Definizione

$I \subset \mathbb{R}$ si dice intervallo se, $\forall\, x, y \in I$ con $x<y$, dato z t.c. $x<z<y$ risulta che $z \in I$.

Esempio

$A = \{ x \in \mathbb{R} : \ 2 < x < 3 \}$



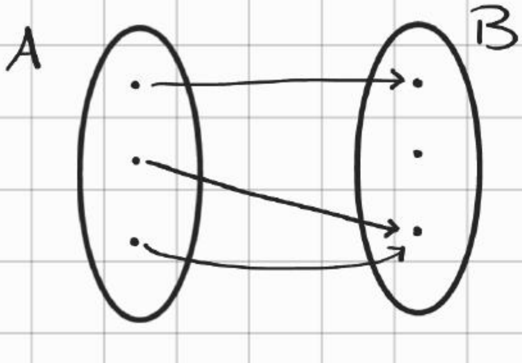
Definizione

Una funzione é una terna di oggetti del tipo:

$$f: A \to B$$

Dove A (dominio) e B (codominio) sono insiemi ed f é la legge che lega gli elementi di A a quelli di B. f mette in corrispondenza ogni elemento di A con uno e uno solo di B.

Esempio



f é uno funzione.

Definizione

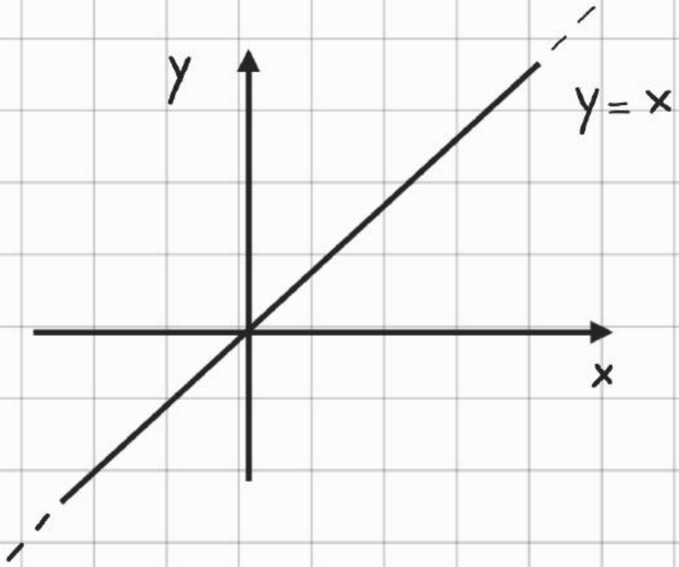
Il grafico di f é la rappresentazione grafica della funzione e ci mostra il suo andamento.
Si indica con:

$$graph(f) = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$$

Quindi il grafico di f é l'insieme delle coppie (a,b) appartenenti al prodotto cartesiano $A \times B$ t.c. $b = f(a)$.

Esempio

$f(x) = x$



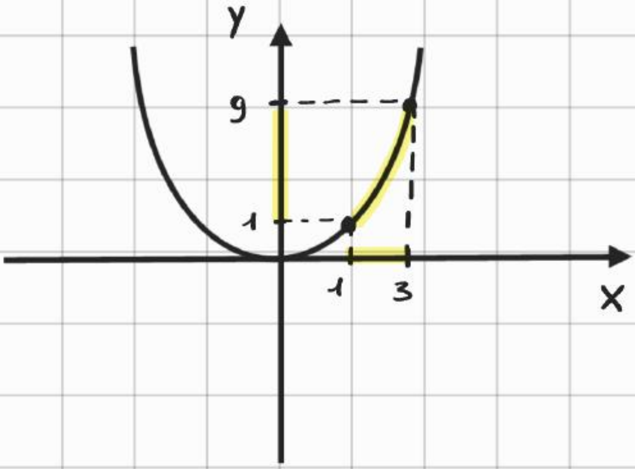
Definizione

Data una funzione $f: A \to B$ e un dominio $D \subset A$, chiameremo $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ l'immagine di D attraverso f e $f(D) \subset B$.
Chiameremo inoltre $imm(f) = f(A)$ l'immagine di f, ovvero l'immagine di tutto il dominio.

Esempio

$A = \mathbb{R}$ $\quad B = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad D = [1, 3]$

$f(D) = [1, 9]$

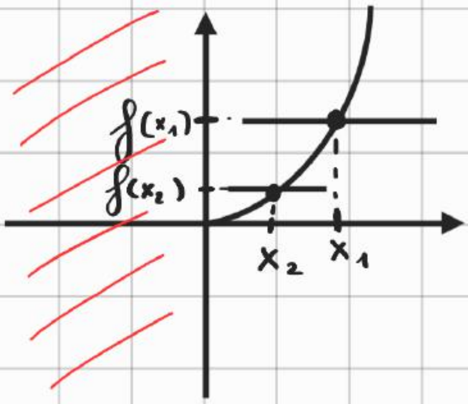


Definizione

$f : A \to B$ si dice iniettiva se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 \neq x_2$ ho che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esempio

$f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad$ é iniettiva



$x_1 \neq x_2$

$f(x_1) \neq f(x_2)$

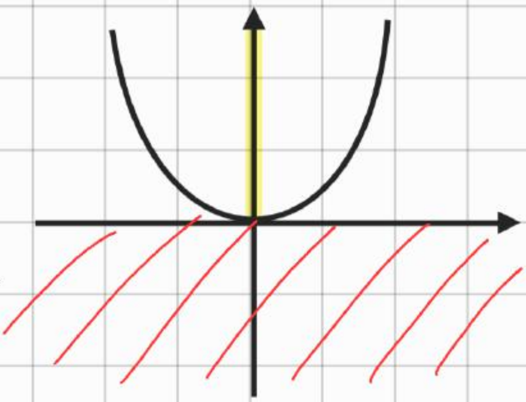
Definizione

$f: A \to B$ si dice surgettiva se $\forall\, y \in B\ \exists$ almeno un elemento $x \in A$ t.c. $f(x) = y$.

Esempio

$f(x) = x^2$

$f: [0, +\infty] \to \mathbb{R}$



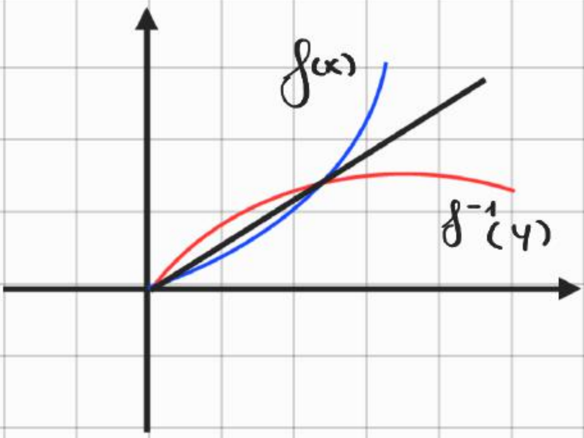
Definizione

$f: A \to B$ si dice bigettiva se f é iniettiva e surgettiva.
Se f é bigettiva allora posso costruire la suo funzione inverse e la indico con f^{-1}.

$$f^{-1}: B \to A$$

Esempio

$f: [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ $\quad f(x) = x^2 \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}$



Definizione

Presi $A, B \subset \mathbb{R}$ e $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, se $\forall x_1, x_2$ risulta che:

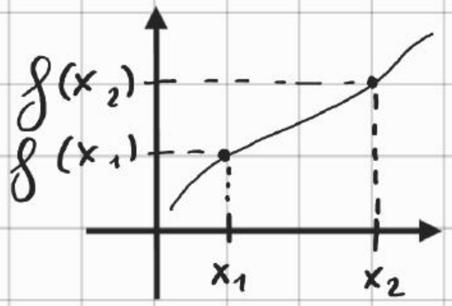
1) $f(x_1) < f(x_2) \longrightarrow f$ si dice strettamente crescente

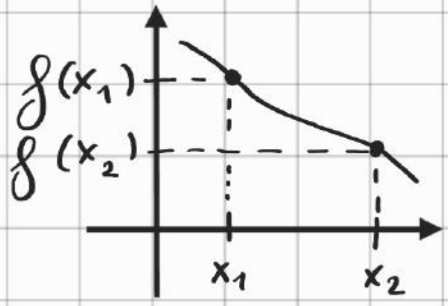
2) $f(x_1) \leq f(x_2) \longrightarrow f$ si dice debolmente crescente

3) $f(x_1) > f(x_2) \longrightarrow f$ si dice strettamente decrescente

4) $f(x_1) \geq f(x_2) \longrightarrow f$ si dice debolmente decrescente

Se si verificano (1) o (3) si dice strettamente monotona, se invece valgono (2) o (4) si dice debolmente monotona.





crescente
(Mantiene l'ordinamento)
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

decrescente
(Inverte l'ordinamento)
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

1) $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

2) $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$

3) $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

4) $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$

Proposizione

Presi $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to B$, $g: B \to C$, allora:

1) f crescente e g crescente $\Rightarrow f \circ g$ é crescente.

2) f crescente e g decrescente $\Rightarrow f \circ g$ é decrescente.

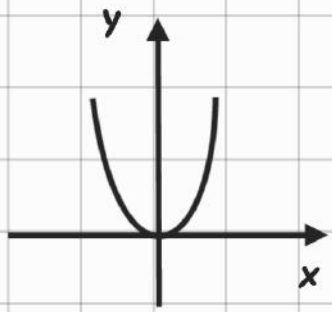
3) f decrescente e g decrescente $\Rightarrow f \circ g$ é crescente.

Definizione

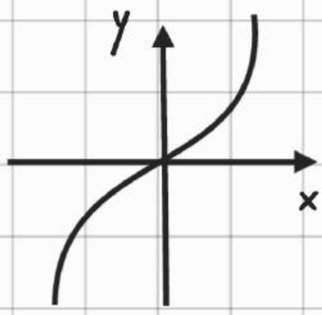
L'insieme di definizione (Dominio) di una funzione é il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove ha senso "scrivere" la funzione $\to$ C.E.

Se $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in D$, f é pari.
Se $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in D$, f é dispari.

Esempio



f é pari



f é dispari

Definizione

f si dice periodica di periodo $P \in \mathbb{R}$ se $\forall x$, $f(x+P) = f(x)$

Definizione

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$ si dice massimo dell'insieme A se $m \geq a \ \forall a \in A$ e $m \in A$.

Definizione

Dato $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, un numero $K \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $K \geq a \ \forall a \in A$. L'insieme di tutti i maggioranti si indica con M_A. Se esiste un maggiorante allora ne esistono infiniti, infatti se $K \in M_A$ anche $m \in M_A \ \forall m \geq K$.

Se $M_A \neq \emptyset$ allora l'insieme A si dice limitato superiormente.

(Definizioni analoghe per minimo, minorante e L. Inf.)

Definizione

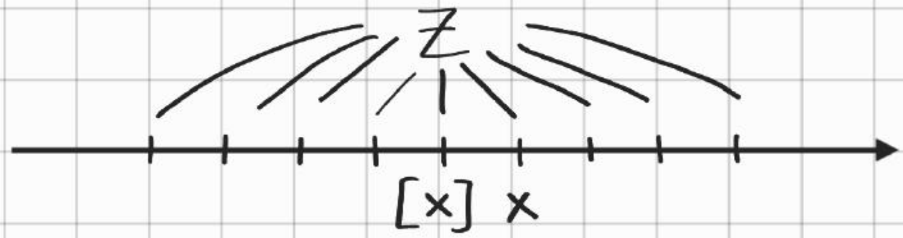
Dato $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, se A é sia superiormente che inferiormente limitato, si dice limitato.

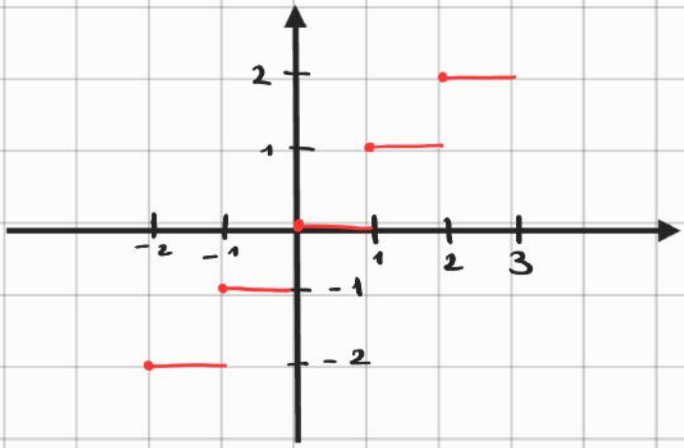
Teorema

Preso $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, superiormente limitato, allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti.
Tale minimo si dice estremo superiore di A e si indica con $\sup(A)$.
Se A non é superiormente limitato scriviamo $\sup(A) = +\infty$.

Definizione

Dato $x \in \mathbb{R}$, si dice parte intera di x e si indica con $[x]$ il numero $[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$





Definizione

Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$:

1) f si dica limita superiormente se $f(a)$ é un insieme limitato superiormente (stesso cosa per l. inf).
2) f ha max se $f(A)$ ha max. Si dice che m é il max di f e si scrive $M = \max(f)$ se $M = \max(f(A))$.
3) $\sup(f)$ é l'estremo superiore di $f(A)$. Se f non é limitata superiormente si scrive $\sup(f) = +\infty$.
4) Se f ha max allora ogni $x_0 \in A : f(x_0) = \max(f)$ si dice punto di max per f.

Proposizione

Preso $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$:

1) Se A ha max e f é debolmente crescente allora f ha $\max = f(\max(A))$.

2) Se A ha min e f é debolmente crescente allora f ha $\min = f(\min(A))$.

3) Se A ha max e f é debolmente decresante allora f ha $\min = f(\max(A))$.

4) Se A ha min e f é debolmente decresante allora f ha $\max = f(\min(A))$.

Definizione

Preso $x \in \mathbb{R}$, si dice valore assoluto di x, e si indica con $|x|$, il numero $|x| = \max\{x, -x\}$.

Definizione

Dato $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, la funzione f si dice continua in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema di permanenza del segno

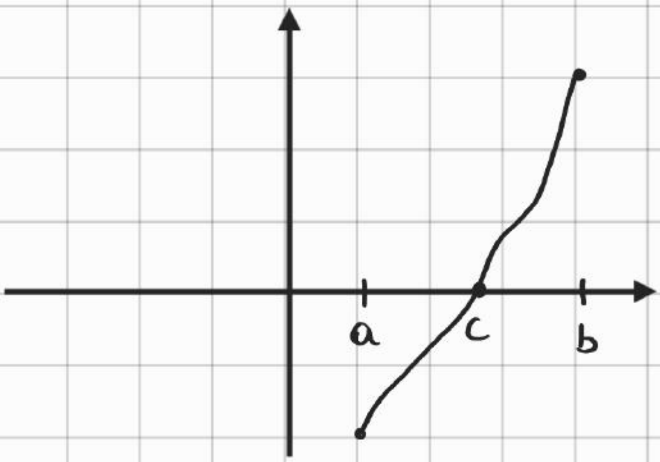
Dato $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, se f é continua in x_0 e il limite di f é diverso da 0, allora la funzione é localmente concorde con il limite.

Teorema

Se f e g sono continue in x_0 allora lo sono anche le funzioni $f+g$, $f \cdot g$ e $|f|$. Se inoltre $f(x_0) \neq 0$ allora anche $\frac{1}{f}$ é continua.

Teorema degli zeri

Presa $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora esiste un punto $c \in (a,b): f(c) = 0$.



Teorema dei valori intermedi

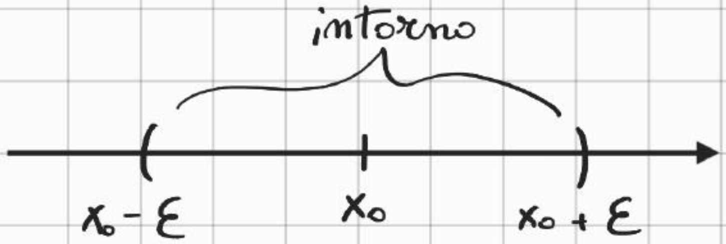
Preso $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua allora $f(I)$ é un intervallo.

Teorema di Weirstrass

Presa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora f ha max e min.

Definizione

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice intorno di x_0 un insieme del tipo $x_0 + \varepsilon$ e $x_0 - \varepsilon$ dove ε è un numero $\in \mathbb{R} > 0$.
ε si dice raggio dell'intorno.



Definizione

Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. x_0 si dice punto di accumulazione per l'insieme A se $\forall U$, intorno di x_0, risulta che:

$$U \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

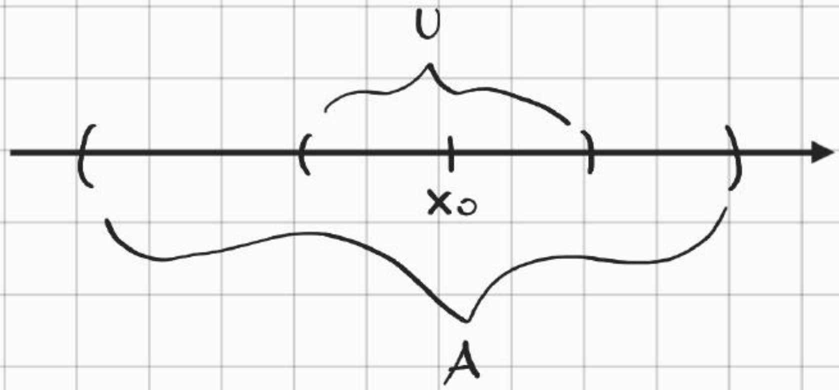
Vuol dire che vicino ad x_0 ci sono altri punti di A oltre ad x_0 e x_0 potrebbe $\notin A$.

Definizione

Un punto $x_0 \in A$ si dice punto isolato di A se esiste un intorno di x_0 : $U \cap A = x_0$

Definizione

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ si dice punto interno ad A se esiste U intorno di x_0 : $U \subset A$.



Definizione

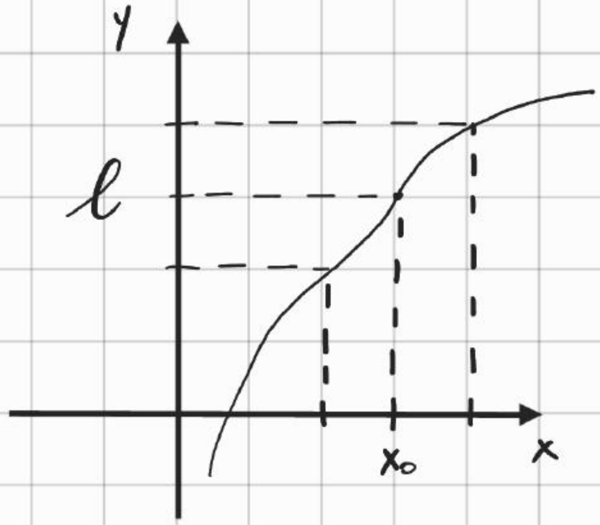
Preso $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$:

1) Si dice di minimo locale se esiste un intorno U di x_0 t. c. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in U \cap A$.
2) Si dice di minimo locale stretto se esiste un intorno U di x_0 t. c. $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.
3) Si dice di massimo locale se esiste un intorno U di x_0 t. c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in U \cap A$.
4) Si dice di massimo locale stretto se esiste un intorno U di x_0 t. c. $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

Definizione

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ é il limite per x che tende ad x_0 di $f(x)$ se $\forall$ V intorno di l esiste U, intorno di x_0, t. c.

$$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$$



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ vuol dire che l é il limite di $f(x)$ quando $x \to x_0$.

Definizione

Presa $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, allora si dice che f é continua in $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Teorema di unicitá del limite

Se il limite esiste allora é unico.

Definizione

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, si dice che $l \in \bar{\mathbb{R}}$ é il limite di $f(x)$ per $x \to x_0^+$ (da destra), e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$, con valori di x_0 che si approssimano a x_0 nell'intorno destro del punto.
Nel caso di limite di $f(x)$ per $x \to x_0^-$ (da sinistra), e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$, diremo che i valori di x si approssimano a x_0 nell'intorno sinistro del punto.

Definizione

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ed esiste un intorno U di x_0 t.c. $x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > \ell$. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ed esiste un intorno U di x_0 t.c. $x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < \ell$.

Definizione

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, se:

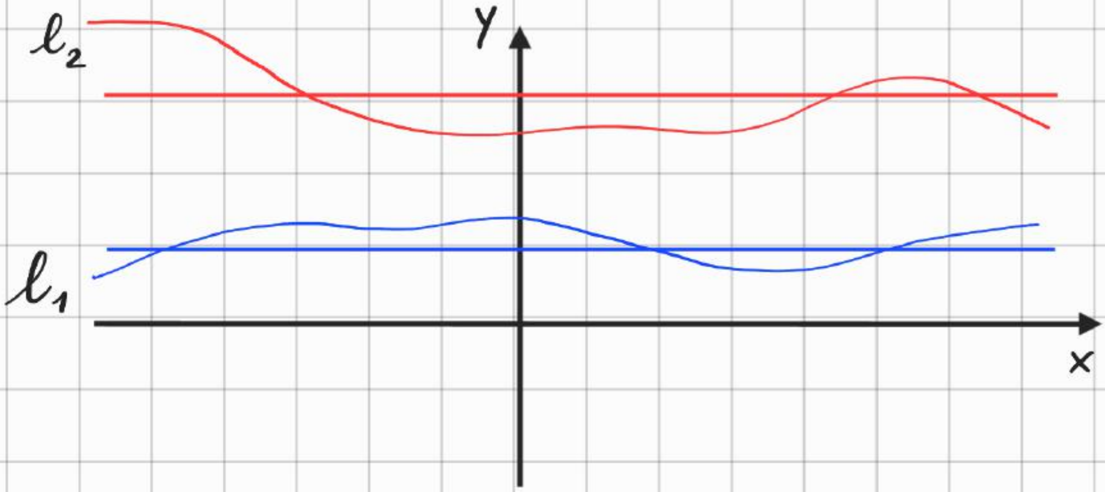
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ allora f si dice continua a destra in x_0

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ allora f si dice continua a sinistra in x_0.

f è continua $\Leftrightarrow$ è continua sia a destra che a sinistra.

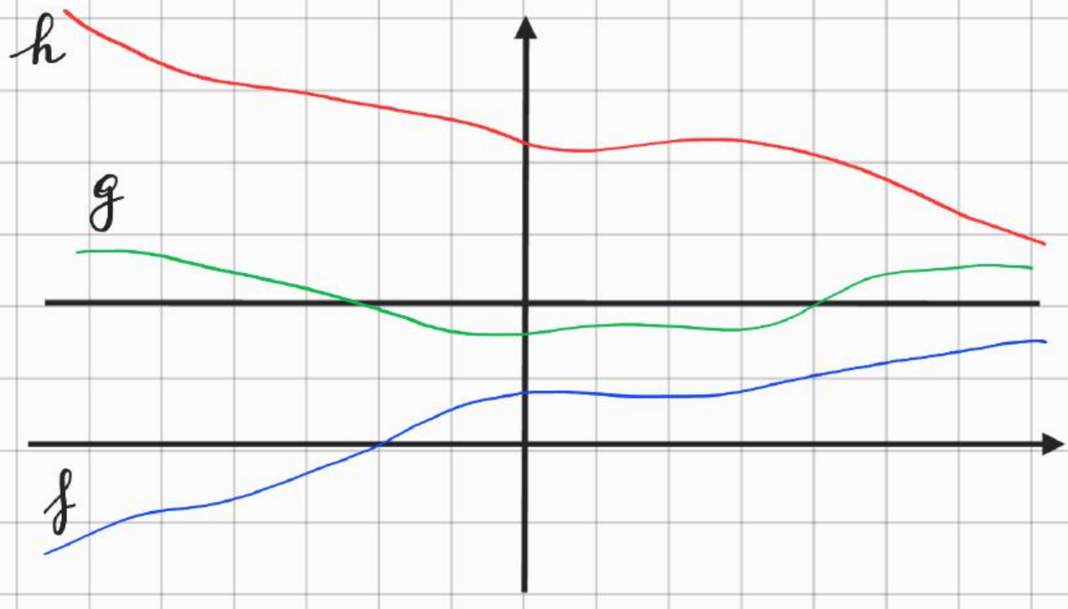
Teoreme di confronto

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ ed esiste U intorno di x_0 t.c. $x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ allora $\ell_1 \leq \ell_2$.



Teoreme dei Carabinieri

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ ed esiste U intorno di x_0 t.c. $x \in A \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.



Teorema di somma e prodotto

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, supponendo che esistano $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ con $\ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{R}}$

1) Se ha senso $\ell_1 + \ell_2$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$

2) Se ha senso $\ell_1 \cdot \ell_2$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

Teorema

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\ell \in \mathbb{R}$ allora f é limitata in un intorno di x_0.

Definizione

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ f si dice infinitesima per $x \to x_0$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ f diverge positivamente per $x \to x_0$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ f diverge negativamente per $x \to x_0$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ f converge ad ℓ per $x \to x_0$

Proposizione

Se f é limitata inferiormente in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$.

Se f é limitata superiormente in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = -\infty$.

Se f é limitata in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ allora $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

Proposizione

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$ con $l \neq 0$

Se $f \to l$ allora $\frac{1}{f} \to \frac{1}{l}$

Proposizione

Presi $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ con f debolmente crescente, allora esistono:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf (f(x)) \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup (f(x))$$

Teorema dei limiti di composizione di funzioni

Presi: $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$, se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ e $y_0 \in Acc(B)$ ed esiste anche $\lim_{y \to y_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ e se si verifica una delle seguenti ipotesi:

1) $y_0 \in B$ e g è continua in y_0.

2) Esiste U intorno di x_0 t.c. se $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \neq y_0$.

Allora esiste $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = l$.

Teorema di Weierstrass generalizzato

Dati $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ continua t.c. $\exists \lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = \ell_2$ valgono i seguenti risultati:

1) f è limitata inferiormente $\Leftrightarrow$ $\ell_1 \neq -\infty$ e $\ell_2 \neq -\infty$.

2) f è limitate superiormente $\Leftrightarrow$ $\ell_1 \neq +\infty$ e $\ell_2 \neq +\infty$.

3) f è limitata $\Leftrightarrow$ $\ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

4) f ha minimo $\Leftrightarrow$ $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) \leq \min\{\ell_1, \ell_2\}$

5) f ha massimo $\Leftrightarrow$ $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) \geq \max\{\ell_1, \ell_2\}$

Definizione

Preso $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g: A \to \mathbb{R}$, si dice che f è un o-piccolo di g per $x \to x_0$ e si scrive:

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

Se esiste una funzione $w(x)$ t.c. $\lim_{x \to x_0} w(x) = 0$ e $f(x) = g(x) \cdot w(x)$.

Definizione

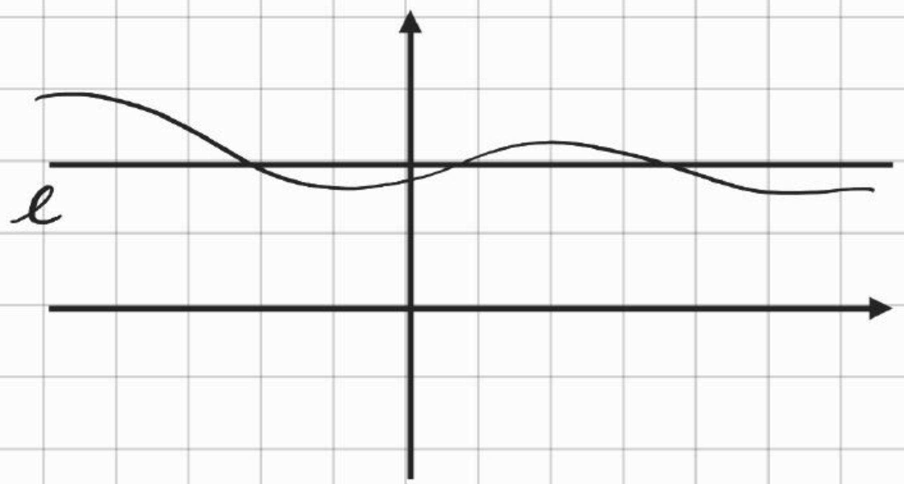
Preso $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$ infinitesime per $x \to x_0$, se esistono $L, \alpha \in \mathbb{R}$ con $L \neq 0$ t.c. :

$$f(x) = L(g(x))^\alpha + o((g(x))^\alpha) \text{ per } x \to x_0$$

Si dice che f é infinitesima di ordine α rispetto a g con parte principale $L(g(x))^\alpha$ per $x \to x_0$.

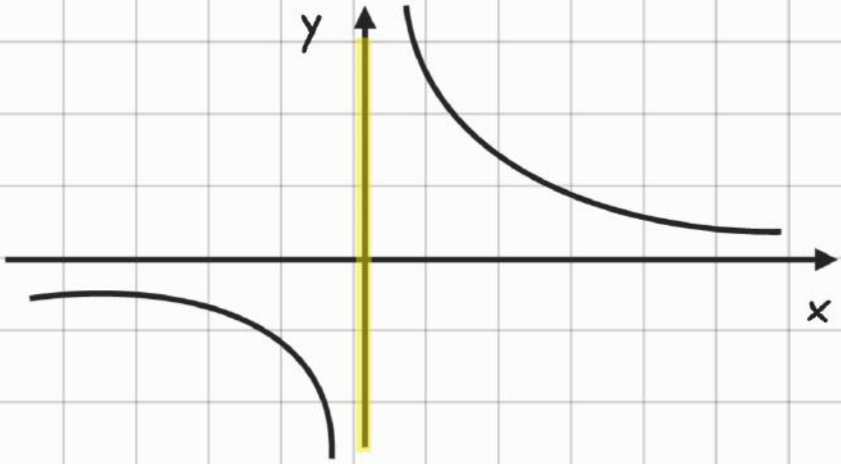
Definizione

Presa $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$, se esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ allora si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = \ell$ per $x \to +\infty$.



Definizione

Dato $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$ e $f : A \to \mathbb{R}$, se f diverge per $x \to x_0^{\pm}$, si dice che f ha un asintoto verticale di equazione $x = x_0$.



Definizione

Preso $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$, se esiste $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}$ con $m\neq 0$ ed esiste anche $\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx=q\in\mathbb{R}$ allora f ha un asintoto obliquo di equazione $y=mx+q$ per $x\to+\infty$.

Definizione

Preso $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ e $x_0\in Acc(A)$, se $\exists\lim\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ allora l si dice derivata di f in x_0.
Se $l\in\mathbb{R}$ allora f é derivabile in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Definizione

Se $\exists\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ questo si chiama derivata destra di f in x_0.

Se $\exists\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ questo si chiama derivata sinistra di f in x_0.

Si indicano rispettivamente con $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$.

f é derivabile in $x_0 \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono entrambe finite.

Definizione

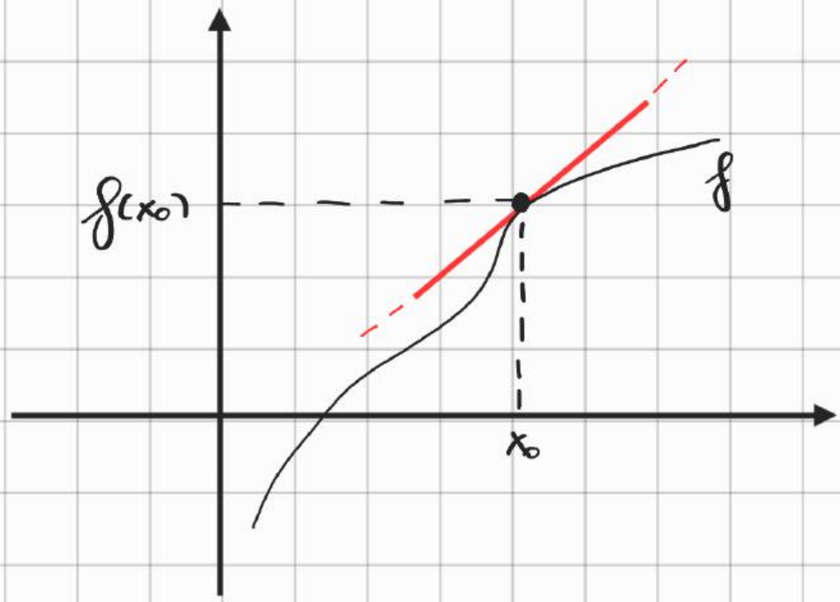
Se esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ entrambe finite ma diverse tra loro allore x_0 si dice punto angoloso.

Definizione

Se $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$ o viceverso, il punto x_0 si dice punto di cuspide.

Definizione

Se f é derivabile in x_0 allora la retta $y - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si dice retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0 ; f(x_0))$.



Definizione

Dato $n \in \mathbb{N}$ si dice che f é di classe C^n se f é derivabile n-volte e $f^{(n)}$ é continua.

Proposizione

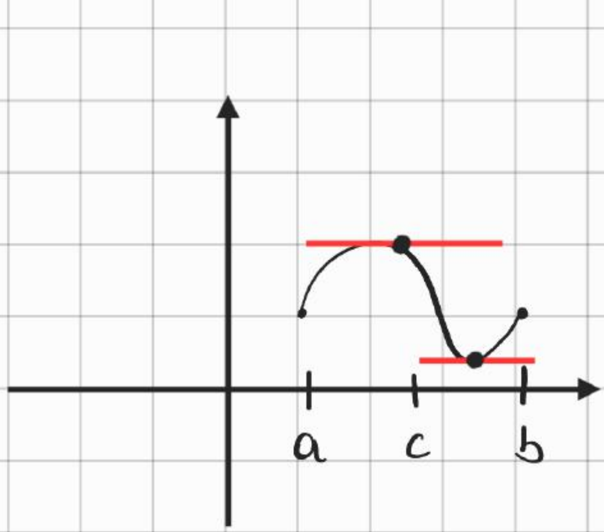
Preso $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ debolmente crescente in A, se f é derivabile in un punto $x_0 \in A$ allora $f'(x_0) \geq 0$.
" " debolmente decrescente in A
" " $f'(x_0) \leq 0$.

Teorema di Fermat

Preso $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$, se x_0 é un punto interno ad A che é di massimo o di minimo locale per f ed f é derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

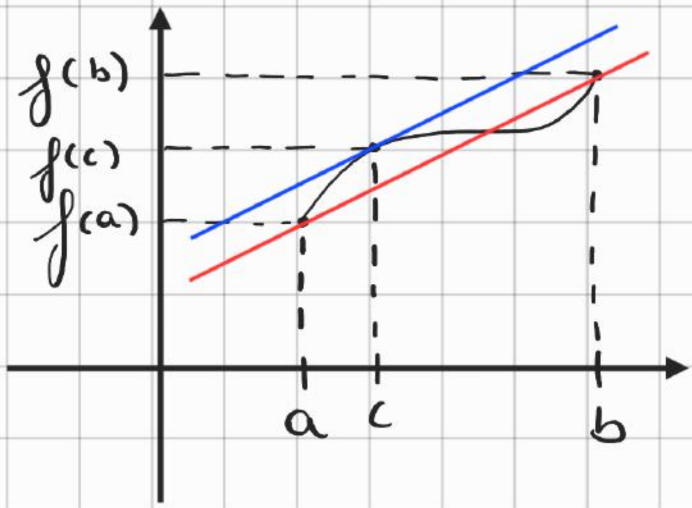
Teorema di Rolle

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), se $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.



Teorema di Lagrange

Prese $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Teorema di Cauchy

Siano $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b), allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.
$f'(c)\,(g(b)-g(a)) = g'(a) = (f(b)-f(a))$, se inoltre $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ allora la relazione precedente si può scrivere come:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teorema

Presa $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{int}(A)$, f derivabile due volte in x_0 e la derivata prima di x_0 è uguale a 0 allora valgono le seguenti affermazioni:

1) Se x_0 è punto di minimo locale allora $f''(x_0) \geq 0$.
2) Se x_0 è punto di massimo locale allora $f''(x_0) \leq 0$.
3) Se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo locale.
4) Se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo locale.

Teorema di De l'Hôpital

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a,b).
Se valgono le seguenti condizioni:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} g(x) = 0$ oppure

$\lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} g(x) = \pm\infty$

2) $g(x) \neq 0$ in un intorno destro di a.

3) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

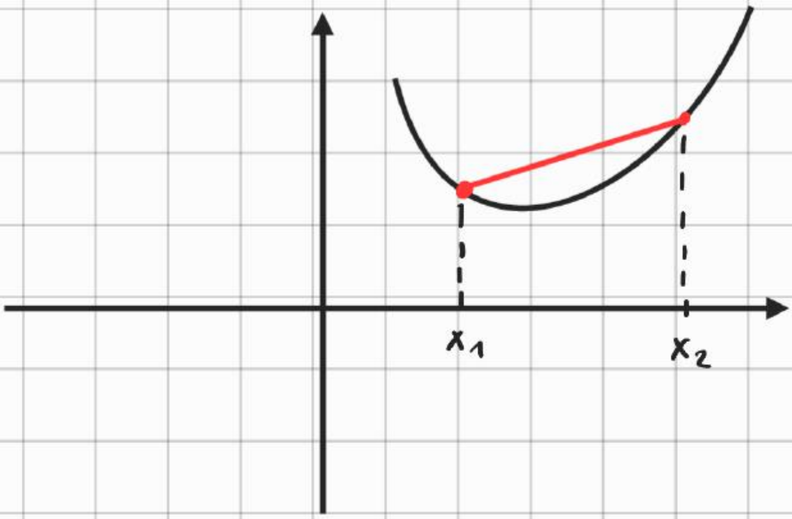
Formula di Taylor

Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$, allora:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{polinomio di grado } 1} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\text{resto}}$$

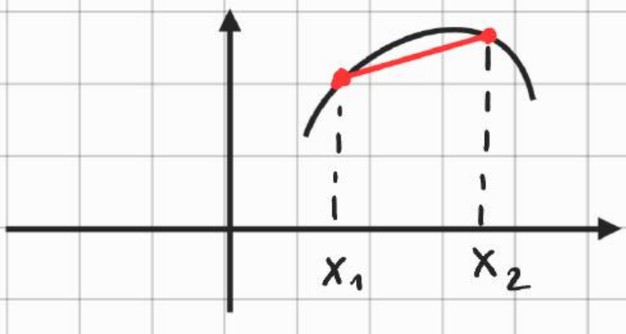
Definizione

Preso $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$, f si dice convessa in I se, presi due punti qualunque sul grafico di f, il segmento che li unisce è sopra il grafico.



Definizione

Preso $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$, f si dice concava in I se, presi due punti qualunque sul grafico di f, il segmento che li unisce è sotto il grafico.



Definizione

Preso $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(I)$ si dice punto di flesso se f è derivabile in x_0 ed esiste un intorno V di x_0 ($V \subset I$) t.c. la quantità $\dfrac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0}$ non cambia segno in $V \setminus \{x_0\}$.

Se invece $f'(x_0) = \pm\infty$, f non è derivabile, e se f è convessa in un intorno destro di x_0 e concava in un intorno sinistro di x_0 o viceversa allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale.

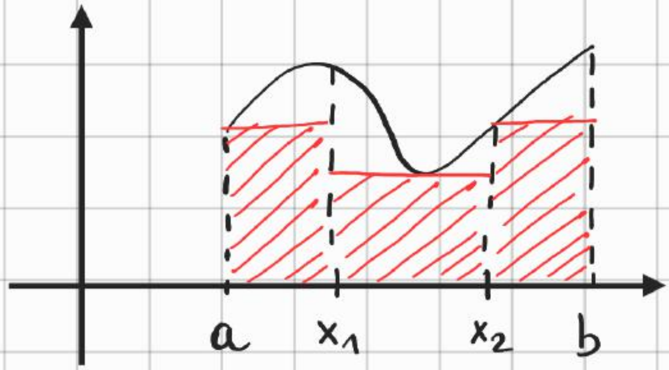
Preso $I \subset \mathbb{R}$, intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte in I, se $f''(x_0) = 0$ e f'' "cambia segno in x_0, allora x_0 si dice punto di flesso.

Definizione

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, limitata, l'integrale definito di $f(x)$ su $[a,b]$ rappresenta l'area del sottografico di f.

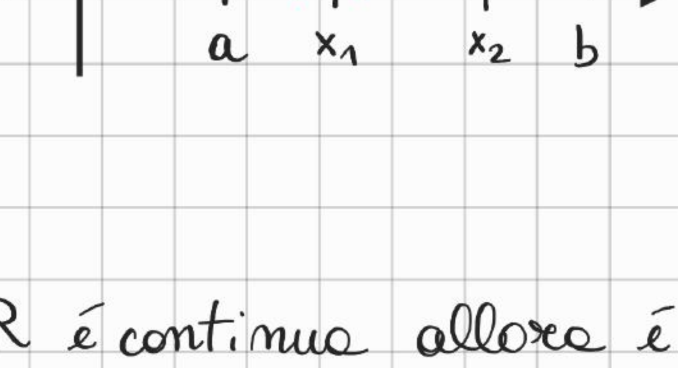
Definizione

$S'(f, A) - \sum_{i=1}^{n} (\inf(f(x))(x_i \cdot x_{i-1})$ si dice somma inferiore di f relativa alla suddivisione A.
Rappresenta la somma dell'area dei rettangoli rossi approssimata per difetto.



Definizione

$S''(f, A) - \sum_{i=1}^{n} (\sup(f(x))(x_i \cdot x_{i-1})$ si dice somma superiore di f relativa alla suddivisione A.
Rappresenta la somma dell'area dei rettangoli rossi approssimata per eccesso.



Teorema

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua allora é integrabile.
Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é generalmente continua allora é integrabile.

Definizione

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é generealmente continua se é limitata e ha eventualmente un numero finito di punti di discontinuitá.

Teorema

Siano f, g integrabili su $[a,b]$ e $k \in \mathbb{R}$, allora $f+g$, $k \cdot f$ e $|f|$ sono integrabili:

1) $\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

2) $\int_a^b (k \cdot f)(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$

3) Se $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$

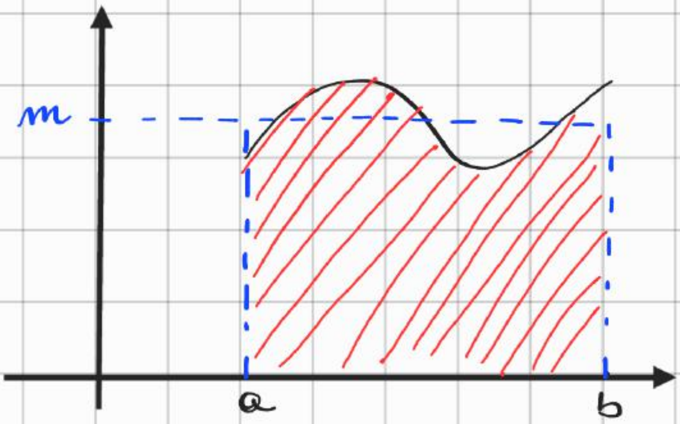
4) $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$

5) Se $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

Definizione

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si dice media integrale di f su $[a,b]$:

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$



Graficamente m é l'altezza di un rettangolo di base $b-a$, con lo stesso area del sottografico di f.

Teorema della media integrale

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, allora:

$$\inf(f(x)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup(f(x))$$

Se f é continua, allora $\exists z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Definizione

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f se F é derivabile in I e vale $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Definizione

L'integrale indefinito di $f(x)$ é l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ e si indica:

$$\int f(x)\,dx \quad \text{(senza gli estremi)}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ continua, allora la funzione:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é una primitiva di f, cioé $F(x)$ é derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Teorema di Torricelli

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua, $a \in I$.
Se G é una primitiva di f su I, allora $\exists\, K \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt + K$ e $\forall \alpha, \beta \in I$.

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Notazione: $\left[G(x)\right]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$.

Teorema

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua, presa $A \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha, \beta: A \to I$ derivabili.
Sia:

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$$

Allora $G(x)$ é derivabile e si ha che
$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$.

Definizione (Integrazione per parti)

$f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, f continua e g di classe C^1, se F è una primitiva di f allora:

$$\int f \cdot g \, dx = F \cdot g - \int F \cdot g' \, dx$$

Definizione (Integrazione per sostituzione)

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f: I \to \mathbb{R}$ continua e $\varphi: J \to I$ di classe C^1, se F è una primitiva di f, allora:

$$\int (f \circ \varphi) \varphi' dx = (F \circ \varphi) + K$$

Definizione

Gli integrali impropri estendono la definizione di integrale definito al caso in cui l'integrando è limitato, oppure l'intervallo di integrazione non è limitato.

Presi $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ e $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ che sia integrabile in tutti gli intervalli $[a, M]$ con $a < M < b$, se esiste:

$$\lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\, dx = L$$

definiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = L$$

Analogamente si definisce $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ con $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $b\in\mathbb{R}$ e f integrabile su $[M,b)$ $\forall\, a<M<b$ come:

$$\lim_{M\to a^+}\int_M^b f(x)\,dx$$

Definizione

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ con $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, che sia integrabile su $[M_1, M_2]$ con $a<M_1<M_2<b$. Scegliamo arbitrariamente $c\in(a,b)$, se esistono entrambi gli integrali impropri:

$$\underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{=L_1} \quad e \quad \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{=L_2}$$

Allora si definisce:

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_1 + L_2$$

E si dice che f é integrabile (in senso improprio) su (a,b).

Criterio del confronto asintotico

Presi $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili su $[a, M]$ $\forall\, a < M < b$, se $\exists\, U$ intorno di b t.c. $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ $\forall x \in U \cap [a, b)$ e

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Allora:

- Se $\ell \neq 0, +\infty$ $\int_a^b f(x)$ converge $\iff \int_a^b g(x)$ converge
- Se $\ell = 0$ e $\int_a^b g(x)$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)$ converge
- Se $\ell = +\infty$ e $\int_a^b f(x)$ converge $\Rightarrow \int_a^b g(x)$ converge

Criterio del confronto

Presi $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili in ogni $[a, M]$ $\forall\, a < M < b$.
Se esiste U intorno sinistro di b t.c.
$0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U \cap [a, b)$:

1) $\int_a^b g(x)$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)$ converge
2) $\int_a^b f(x)$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)$ diverge

Criterio dell'assoluta convergenza (Per funzioni a segno variabile)

f, integrabile su ogni intervallo chiuso $[a,b] \in I$, si dice assolutamente integrabile su I se $|f|$ é integrabile su I, cioé $\int_I |f(x)|\,dx$ converge.

Definizione

$x \in \mathbb{R}$, definiamo la parte positiva di x con:

$$x^+ = \max\{x, 0\}$$

e la parte negativa di x con:

$$x^- = -\min\{x, 0\}$$

Definizione

Una successione é una funzione $f: S \to \mathbb{R}$ dove S é una semiretta di $\mathbb{N}$, cioé $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ per un qualche n_0.

Invece di scrivere $f(n)$, di solito una successione si denota con a_n.

L'unico limite che ha senso studiare per una successione a_n é il limite per $n \to +\infty$ (perché $+\infty$ é l'unico punto di accumulazione per una qualsiasi semiretta $S \subseteq \mathbb{N}$).

Definizione

Si ha che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ se $\forall V$ intorno di l $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \in V$ e $\forall n \geq \bar{n}$.
Si dice che a_n converge a $l \in \mathbb{R}$ e che a_n diverge a $\pm \infty$.

Definizione

Data $a_n : S \to \mathbb{R}$ una successione, consideriamo una funzione $K_n : \mathbb{N} \to S$ strettamente crescente e notiamo che a_{K_n} é una sottosuccessione di a_n.

Teorema

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \iff \lim_{n \to +\infty} K_n = l$

Definizione

Una successione a_n é debolmente crescente se $n > m \Rightarrow a_n \geq a_m$.
(strettamente crescente se $n > m \Rightarrow a_n > a_m$).
Una successione a_n é debolmente decrescente se $n > m \Rightarrow a_n \leq a_m$.
(strettamente decrescente se $n > m \Rightarrow a_n < a_m$).

a_n é debolmente crescente $\iff a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se a_n é debolmente crescente o decrescente allora ammette limite, se é debolmente crescente il limite non puó essere $-\infty$, se é debolmente decrescente il limite non puó essere $+\infty$.

Definizione

Una successione a_n é limitata superiormente se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \ \forall n \in S$ e limitata inferiormente se $\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \geq m \ \forall n \in S$.
a_n é limitata se é sia limitata superiormente che inferiormente.

Teorema

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ allora a_n ha minimo, cioé $\exists\, n_{min} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq a_{n_{min}} \ \forall n \in S$.

Teorema

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ e $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{\bar{n}} \geq l$ allora a_n ha max

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ e $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{\bar{n}} \leq l$ allora a_n ha min

Teoreme

Se $a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$ allora:

$a_n + b_n \to l_1 + l_2$, $a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$

Se $a_n = c$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = c$.

Teorema

Sia a_n una successione e a_{h_n} e a_{k_n} due sottosuccessioni t.c. $h_n \cup k_n = \mathbb{N}$, diremo che le due sottosuccessioni saturano gli indici.
Se $\exists \lim_{n \to +\infty} a_{h_n}$ e $\exists \lim_{n \to +\infty} a_{k_n}$ e sono uguali allora

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n$ ed í uguale agli altri.

Criterio del rapporto

Sia a_n una successione, se $a_n > 0$ definitivamente ed esiste $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora:

- Se $0 \leq l < 1$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
- Se $l > 1$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$
- Se $l = 1$ Non si applica il Teoreme.

Criterio della radice

Se $a_n > 0$ definitivamente e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, allora:

- Se $0 \leq \ell < 1$ allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
- Se $\ell > 1$ allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$
- Se $\ell = 1$ Non si può dire niente.

Teorema

Se una successione $a_n > 0$ definitivamente e se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Serie Numeriche

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione $S \to \mathbb{R}$.

Vogliamo definire $\sum_{n \in S} a_n$, la somma di tutti i termini della successione.

Esempio

$a_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad S = \{ n \geq 1 \}$

Voglio definire $\sum_{n \in S} a_n$ ovvero $a_1 + a_2 + a_3 \dots$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \dots$

Aggiungendo termini sembra che la somma si avvicina sempre di più a 1.

Infatti si ha che $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

Prendendo il $\lim_{n \to +\infty}$ sembra ragionevole che:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1$

Infatti definiremo $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} = 1$

Definizione generale

Data $\{a_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definiamo:

$$\underbrace{S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{\text{Somma parziale } n\text{-esima}}$$

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é una nuova successione.

Definiamo $\underbrace{\sum_n a_n}_{\text{Serie relativa ad } \{a_n\}}$ come $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$, se questo esiste.

- Se il lim non esiste si dice che la serie é indeterminata.
- Altrimenti, se $S \in \mathbb{R}$, la serie si dice convergente.
- Se $S = +\infty$ si dice che la serie diverge positivamente.
- Se $S = -\infty$ si dice che la serie diverge negativamente.

Esempio

- $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0 + \dots + 0 = 0$

e $S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

• $a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 1 + \ldots + 1 = n+1$

e $S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ quindi:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1 = +\infty$$

Formula di Gauss

• $a_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n = 0+1+2+3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

e quindi $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+n}{2} = +\infty$

Serie Geometrica

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ e $a_n = \alpha^n$ $\qquad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

Calcoliamo $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n$

$$S_n = \sum_{J=0}^{n} \alpha^J = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$$

• Se $|\alpha| < 1$ abbiamo $\alpha^{n+1} \to 0$, quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$\alpha^{n+1} \to 0$

Quindi converge.

- Se $\alpha > 1$ allora $\alpha^{n+1} \to +\infty$, quindi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} = +\infty$$

Quindi diverge positivamente.

- Se $\alpha = 1$ (Caso limite) $a_n = \alpha^n = 1^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = +\infty$$

- Se $\alpha = 0$ $a_n = \alpha^n = 0 \quad \forall n \geq 1$, quindi

$$\sum_{n\geq 1} \alpha^n = \sum_{n\geq 1} 0 = 0$$

Quindi converge.

- Se $\alpha < -1$ α^{n+1} ? Non ha limite!

Perché se n é pari, $n+1$ é dispari e $\alpha^{n+1} < 0$ e tende a $-\infty$ perché $|\alpha| > 1$.

Se n é dispari, $n+1$ é pari e $\alpha^{n+1} > 0$ e tende a $+\infty$.

Quindi ho due sottosuccessioni

- $b_{2n} \to -\infty$
- $b_{2n+1} \to +\infty$

Segue che $b_n = \alpha^{n+1}$ non ha limite.

Quindi anche $\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} = S_n$ non ha limite.

Dunque S_n non ha limite e $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n$ é indeterminata se $\alpha < -1$.

- se $\alpha = -1$ $\quad \alpha^n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

$$S_0 = a_0 = (-1)^0 = 1$$
$$S_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1) = 0$$
$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$$
$$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$
$$\vdots$$
$$S_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

S_n non ha limite, quindi $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n$ é <u>indeterminata</u>.

Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } |\alpha| < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } \alpha \leq -1 \end{cases}$$

Cosa fa $\sum_{n=k}^{+\infty} \alpha^n = \alpha^k + \alpha^{k+1} + \alpha^{k+2} \dots = \alpha^k(1+\alpha+\alpha^2 \dots)$
$= \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$

Ad esempio se $\alpha = \frac{1}{2}$ e $k = 1$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Invece $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + 1 = 2$

Perché $\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

Esempio

$\alpha = -\frac{1}{3} \qquad k = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

Osservazione

Se $-1 < \alpha < 0$, la somma $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$

È compresa tra $\frac{1}{2}$ e 1 perché:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = 1 + \underbrace{\alpha}_{<0} + \underbrace{\alpha^2}_{>0} + \underbrace{\alpha^3}_{<0} + \underbrace{\alpha^4}_{>0} + \dots$$

Esempio

$$\sum_{n} \frac{1}{n!} = ?$$

Resto di Lagrange $\rightarrow R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

con $x < z < x_0$

Partiamo da $e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \underbrace{R_n(x)}$

Nel nostro caso $R_n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!} \cdot x^n$

con $0 < z < x$

Poniamo adesso $x = 1$ e troviamo:

$$e^1 = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}}_{S_n \text{ per } \sum_n \frac{1}{n!}} + R_n(1) = \frac{e^z}{(n+1)!} \cdot 1$$

dipende anche da S_n

Quindi $|e - S_n| = \frac{e^{z}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$

Prendo il limite per $n \to +\infty$, visto che $\frac{e}{(n+1)!} \to 0$, concludo che $S_n \to e$.

Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Teorema ("Condizione necessaria")

Se a_n è una successione e $\sum_n a_n$ converge, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione

$$S_{n+1} = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{S_n} + a_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

Quindi $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

Se suppongo che $\sum_n a_n = \ell \in \mathbb{R}$, allora:

$$\underbrace{S_{n+1} - S_n}_{a_n} \longrightarrow (\ell - \ell) = 0$$

Segue che $a_n \to 0$.

Conseguenza "pratica": se ho una successione $\{a_n\}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non è 0 (può non esistere, essere $= \pm\infty$ o un numero $\neq 0$) allora $\sum_n a_n$ <u>non converge</u>

Esempio

- $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$; quindi:

  $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ non converge.

- $a_n = n \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$; quindi $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ non converge.

Attenzione: se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ non é detto che la serie converga!

Teorema

Se a_n e b_n sono due successioni e $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno senso (cioé non sono indeterminate) allora anche $\sum_n (a_n + b_n)$ ha senso e vale anche che:

$$\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n,$$ supponendo che la somma non sia una forma indeterminata.

Esempio

- $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

- $a_n = 1 \qquad b_n = -1 \qquad \sum_n a_n = +\infty \quad \sum_n b_n = -\infty$

$\sum_n (a_n + b_n) = ?$ Il teorema non si puó applicare

Però $a_n + b_n = 1 - 1 = 0$, quindi: ↓

$$\sum_n (a_n + b_n) = 0 .$$

- $a_n = n^2 \quad b_n = -n \quad \sum_n a_n = +\infty \quad \sum_n b_n = -\infty$

Stavolta $a_n + b_n = \underbrace{n^2 - n}_{n(n+1)} \longrightarrow +\infty$

Segue dalla condizione necessaria che $\sum_n (a_n + b_n)$ non converge (ma diverge positivamente).

Osservazione

Non esiste un teorema analogo riguardo a $\sum_n (a_n \cdot b_n)$. In particolare non é vero che:

$$\sum_n (a_n \cdot b_n) = \left(\sum_n a_n\right) \cdot \left(\sum_n b_n\right)$$

Esempio

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \sum_n a_n = 2 \quad \sum_n b_n = \frac{3}{2}$$

$$a_n \cdot b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ e } \sum_n a_n b_n = \sum \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

e $\frac{6}{5} \neq 2 \cdot \frac{3}{2}$.

Puó anche succedere che $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergono ma $\sum_n a_n \cdot b_n$ <u>non</u> converge!

Serie (definitivamente) a termini positivi

Teorema

Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora $\sum_n a_n$ converge o diverge positivamente (non può essere indeterminata o andare a $-\infty$).

Dimostrazione

Abbiamo visto che $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

Se $a_n \geq 0$ definitivamente, ho che $S_{n+1} \geq S_n$ definitivamente.

Quindi $\{S_n\}$ è definitivamente (debolmente) crescente, quindi ammette limite, che può essere un numero reale, oppure $+\infty$.

Osservazione

Se $a_n \leq 0$ definitivamente, analogamente si può dire che $\sum_n a_n$ converge oppure diverge negativamente.

Teorema (Criterio del confronto)

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, allora:

1) se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge.

2) Se $\sum_n b_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ diverge.

Idea: se $0 \le a_n \le b_n$ $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$, allora anche
$0 \le \sum_n a_n \le \sum_n b_n$

<u>Esempio</u>

Sapendo che $\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$, posso concludere che:

$\sum_{n=0}^{+\infty} n = +\infty$ (perché $0 \le \underbrace{1}_{a_n} \le \underbrace{n}_{b_n}$) e anche

$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 = +\infty$ (perché $0 \le 1 \le n^2 \quad \forall n \ge 1$)

- $\sum_n \underbrace{\frac{\sin^2 n}{2^n}}_{a_n}$ $\qquad a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n} \le \frac{1}{2^n} = b_n$

So che $\sum_n b_n$ converge, e sappiamo calcolare la somma, quindi per il teorema anche $\sum_n a_n$ converge (ma non sappiamo calcolare la somma).

- $\sum_n n!$ $\qquad$ Abbiamo $n! \ge n \quad \forall n \ge 1$ e sappiamo che $\sum_n n = +\infty$, quindi concludiamo che:

$\sum_n n! = +\infty$

Criterio del confronto asintotico

Teorema

$\{a_n\}, \{b_n\}$, due successioni t.c. $a_n > 0, b_n > 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Se $\ell \in (0, +\infty)$ allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso "comportamento" (entrambe convergono o divergono).

2) se $\ell = 0$ e $\sum_n b_n$ converge, allora $\sum_n a_n$ converge.

Perché se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ allora $\frac{a_n}{b_n} < 1$ definitivamente e anche $a_n < b_n$ definitivamente.

3) se $\ell = +\infty$ e $\sum_n b_n$ diverge, allora $\sum_n a_n$ diverge.

Osservazione

Se $\sum_n b_n = +\infty$ non posso concludere niente riguardo a $\sum_n a_n$

Esempio

$$\sum_n \frac{1}{2^n - \log n}$$

$a_n = \frac{1}{2^n - \log n} > 0$ definitivamente perché:

$$2^n > \log n$$

Idea: per n grande, log "conta" molto di meno rispetto a 2^n quindi faccio un confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{2^n}$.

Abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^n-\log n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n-\log n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{\log n}{2^n}} = 1 = \ell$$

Quindi $\ell \in (0,+\infty)$, quindi $\sum_n a_n$ ha lo stesso comportamento di $\sum_n b_n$, che converge.
Segue che $\sum_n a_n$ converge.

Criteri della radice e del rapporto

Teorema (Criterio della radice)

Sia $\{a_n\}$ una successione t.c. $a_n > 0$ definitivamente.

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$:

1) Se $0 \le \ell < 1$, allora $\sum_n a_n$ converge.

2) Se $\ell > 1$, allora $\sum_n a_n$ diverge.

Dimostrazione

1) Se $l<1$, scelgo $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $l<\alpha<1$ e visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$, definitivamente, avrò $\sqrt[n]{a_n}<\alpha$ quindi $a_n < \alpha^n$ definitivamente.

Per confronto, visto che $\sum_n \alpha^n$ converge concludo che $\sum_n a_n$ converge.

2) Prendendo $1<\alpha<l$ e poi definitivamente $\alpha<\sqrt[n]{a_n}$, quindi $\alpha^n < a_n$ definitivamente e ora $\sum_n \alpha^n = +\infty$ perché $\alpha>1$, quindi anche $\sum_n a_n$ diverge.

Osservazione

Quando $l=1$ non si può concludere niente.

Esempio

$$\sum_n \frac{n}{3^n} \qquad a_n = \frac{n}{3^n} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

Abbiamo $l<1$ quindi la serie converge.

Teorema (Criterio del rapporto)

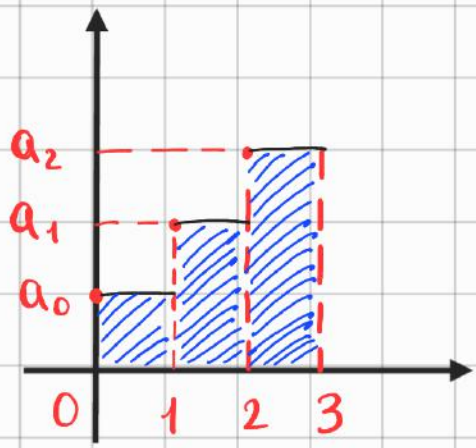
Sia $\{a_n\}$ una successione t.c. $a_n>0$ definitivamente.

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Legami con gli integrali impropri

Una serie $\sum_n a_n$ si può scrivere come integrale improprio.

Considero $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = a_{\underbrace{[x]}_{\text{parte intera}}}$



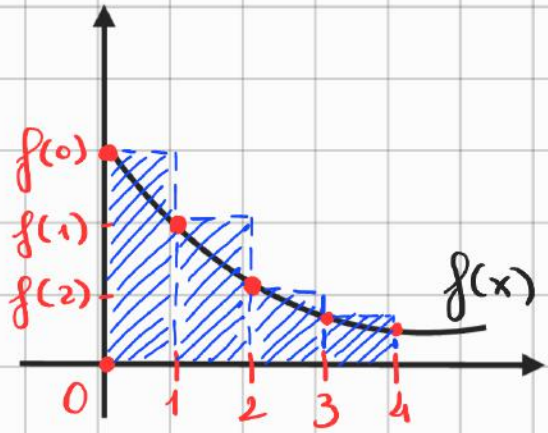
Si ha $\sum_{J=0}^{n} a_J = \int_0^{n+1} f(x)\,dx$

Quindi prendendo il limite per $n \to +\infty$, trovo:

$$\sum_n a_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$ (Se i limiti hanno senso)

Se esiste l'integrale improprio, il valore della serie sarà uguale al valore dell'integrale improprio.

Viceversa, partendo da $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, posso considerare la successione $a_n = f(n)$ e la serie $\underbrace{\sum_n a_n}_{\text{Somma delle aree di tutti i rettangoli blu.}} = \sum_n f(n)$



1) Se $0 \leq \ell < 1$, allora $\sum_n a_n$ converge.

2) Se $\ell > 1$, allora $\sum_n a_n$ diverge.

Dimostrazione

Sappiamo che se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, allora esiste anche $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Esempio

$$\sum_n \frac{n^2}{n!} \qquad a_n = \frac{n^2}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \to 0$$

Quindi $\ell = 0$ e la serie converge.

Osservazione

Questi criteri per successioni definitivamente positive, si applicano anche per successioni definitivamente negative.

Infatti se $a_n < 0$ definitivamente, avremo $-a_n > 0$ definitivamente, quindi applico i criteri visti alla successione $\{-a_n\}$ e poi $\sum_{J=0}^{n} a_J = -\sum_{J=0}^{n} (-a_J)$, dunque:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-a_n) \quad \text{(Se i limiti esistono)}$$

Questa volta il valore della serie e il valore dell'integrale non sarà proprio uguale.

<u>Teorema</u> (Criterio dell' integrale)

Fissiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$, e $f: [\bar{n}, +\infty) \to \mathbb{R}$ che sia debolmente decrescente, continua con $f(x) > 0$ $\forall x \in [\bar{n}, +\infty)$ e poniamo $a_n = f(n)$.

Allora $\sum_n a_n$ e $\int_{\bar{n}}^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento.

$$\sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} a_n \leq \int_{\bar{n}}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} a_n$$

Il teorema dice questo

<u>Esempio</u>

(Serie armonica generalizzata) $\longrightarrow$ Se $\alpha = 1 \rightsquigarrow \sum_n \frac{1}{n}$

Serie Armonica

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha > 0$$

Converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

Infatti $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è decrescente e continua e:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Osservazione

Se $\alpha \leq 0$, $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge perché non é soddisfatta nemmeno la condizione necessaria.

Esempio

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = ?$$

con $\alpha, \beta > 0$

Usiamo il criterio dell'integrale con $f(x) = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1, \beta \in \mathbb{R} \\ \text{diverge se } \alpha < 1, \beta \in \mathbb{R} \\ \text{converge se } \alpha = 1, \beta > 1 \\ \text{diverge se } \alpha = 1, \beta \leq 1 \end{cases}$$

La serie si comporta allo stesso modo.

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad a_n = e^{1/n} - 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} e^{1/n} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

La serie può convergere!

Usiamo Taylor: $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$

Quindi $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad t = \frac{1}{n}$

$$a_n = e^{1/n} - 1 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Il termine "importante" sarà $\frac{1}{n}$.

Pongo $b_n = \frac{1}{n}$ e uso il confronto asintotico.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

tende a 0

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(1 + o(1)\right) = 1$$

Per confronto asintotico, concludo che $\sum_n a_n$ ha lo stesso comportamento di $\sum_n b_n$, che sappiamo divergere.

Quindi $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$.

Serie a segno arbitrario

Prendiamo $\{a_n\}$ una successione qualsiasi.

Definizione (Convergenza Assoluta)

Diciamo che $\sum_n a_n$ converge assolutamente se $\sum_n |a_n|$ converge.

Teorema (Criterio dell'assoluta convergenza)

Se $\sum_n a_n$ converge assolutamente, allora converge

e $\left|\sum_n a_n\right| \leq \sum_n |a_n|$

Dimostrazione

Segue quello per gli integrali impropri:

$a_n = a_n^+ - a_n^-$ $\qquad$ $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$

$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

Se $\sum_n |a_n|$ converge, per confronto convergono anche $\sum_n a_n^+$ e $\sum_n a_n^-$

Quindi converge anche $\sum_n a_n = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-$

Per la disuguaglianza triangolare:

$\left|\sum_{J=0}^{n} a_J\right| \leq \sum_{J=0}^{n} |a_J|$ e prendendo il limite per $n \to +\infty$ trovo:

$$\left|\sum_n a_n\right| \leq \sum_n |a_n|$$

Esempio

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ $\qquad$ $a_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$ é a segno variabile

$$|a_n| = \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

Visto che $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (Serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$)

Per confronto segue che $\sum_n \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|$ converge, quindi per il criterio di assoluta convergenza concludo che anche $\sum_n \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge.

Osservazione

Se $\sum_n |a_n|$ diverge, non si puó concludere niente riguardo a $\sum_n a_n$.

Serie a segno alterno

Definizione

Una serie a segno alterno é una serie della seguente forma: $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$, dove $\{a_n\}$ é una successione a segno costante.

Esempio

$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^3}$ é a segno alterno.

$\sum_n (-1)^n\left(-\frac{1}{n}\right)$ é a segno alterno.

$\sum_n (-1)^n \underbrace{\sin(n)}_{\text{non ha segno costante}}$ non é a segno alterno.

Teorema (Criterio di Leibnitz)

Se $\{a_n\} \geq 0$ definitivamente e debolmente decrescente e t.c. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ (successione infinitesima), allora:

$\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ converge.

$$\left(\left| \sum_{J=0}^{+\infty} (-1)^J \cdot a_J - \sum_{J=0}^{n} (-1)^J \cdot a_J \right| \leq a_{n+1} \right)$$

Esempio

$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge perché $a_n = \frac{1}{n}$ é ≥ 0 e debolmente decrescente e $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Notare che la serie dei valori assoluti é:

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$$

Questo é un esempio in cui $\sum_n |b_n|$ diverge ma $\sum_n b_n$ converge.

$\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ si puó applicare Leibnitz?

$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = - \frac{(-1)^n}{n} \to$ Sappiamo che $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge, quindi converge anche:

$$\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$$

Esempio

Può essere che $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergano ma $\sum_n a_n b_n$ non converga.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\log n} \qquad a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{\log n}$$

$\downarrow$ Converge

$\downarrow$ Converge per Leibnitz

$$a_n b_n = \frac{(-1)^{2n}}{n \log n}$$

$$a_n b_n = \frac{1}{n \log n}$$

Quindi $\sum_n a_n b_n = \sum_n \frac{1}{n \log n}$ diverge

Il confronto asintotico non funziona se il segno della successione non è definitivamente costante.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n} + 1}{n}$$

Si ha $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n} + 1}{n}} =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{(-1)^n \cdot \sqrt{n} + 1} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{(-1)^n \cdot \sqrt{2}}}_{\to 0}} = 1$$

Quindi il confronto asintotico (se funzionasse) direbbe che $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso comportamento.

<u>Non</u> è vero!

$$\sum_n a_n = \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$ converge per Leibnitz.

$$\sum_n b_n = \underbrace{\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{converge}} + \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$$

Quindi $\sum_n b_n$ <u>diverge</u>!