

Tecniche di dimostrazione

Volendo dimostrare $Ipotesi \models Tesi$, si possono impiegare diversi tipi di dimostrazione:

diretta dimostrare che $Ipotesi \Rightarrow Tesi$ è una tautologia usando solo gli assiomi; la conseguenza logica vale per la corrispondenza tra conseguenza logica e tautologia.

con ipotesi non tautologiche costruire una dimostrazione $Ipotesi \vdash Tesi$ senza conoscere a priori le ipotesi ma aggiungendole man mano che vengono impiegate.

per assurdo dimostrare che affermando le ipotesi e negando la tesi si ottiene una contraddizione. Per verificare che questa tecnica è valida è necessario dimostrare che la seguente formula è una tautologia:

$$Ipotesi \Rightarrow Tesi \quad \Leftrightarrow \quad Ipotesi \wedge \neg Tesi \Leftrightarrow F$$

Il membro sinistro è uguale a $\neg Ipotesi \vee Tesi$ per eliminazione dell'implicazione, e lo stesso vale per il destro:

$$\begin{aligned} & (Ipotesi \wedge \neg Tesi \Leftrightarrow F) \\ & \Leftrightarrow (Ipotesi \wedge \neg Tesi \wedge F) \vee (\neg(Ipotesi \wedge \neg Tesi) \wedge \neg(F)) && \text{elim. doppia implicazione} \\ & \Leftrightarrow F \vee (\neg(Ipotesi \wedge \neg Tesi) \wedge T) && \text{assorbimento, F:T} \\ & \Leftrightarrow \neg Ipotesi \vee \neg(\neg Tesi) && \text{unità, De Morgan} \\ & \Leftrightarrow \neg Ipotesi \vee Tesi && \text{doppia negazione} \end{aligned}$$

per contrapposizione dimostrare che se non vale la tesi allora non valgono le ipotesi. Valida perché:

$$Ipotesi \Rightarrow Tesi \quad \Leftrightarrow \quad \neg Tesi \Rightarrow \neg Ipotesi \quad (\text{contronominale})$$

è una tautologia.