

Dimostrare tautologie

Verificare che una formula proposizionale è una tautologia costruendo una tavola di verità non è sempre pratico (o possibile, nel caso di logiche in cui una formula può avere infiniti modelli).

Una possibile soluzione è impiegare una dimostrazione per sostituzione, per trasformare una formula $P \Leftrightarrow Q$ in una sequenza di passi $P \Leftrightarrow R_1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow R_n \Leftrightarrow Q$.

Le dimostrazioni per sostituzione si fondano su tre pilastri:

rimpiazzamento $P[Q/R]$ è la formula ottenuta da P rimpiazzando una specifica occorrenza della sottoformula R con la formula Q :

$$\neg(A \Rightarrow B) \vee (\underline{B} \wedge C)[B \vee D/B] := \neg(A \Rightarrow B) \vee ((B \vee D) \wedge C)$$

principio di sostituzione

$$\frac{Q \Leftrightarrow R}{P \Leftrightarrow P[R/Q]} [\text{PDS}]$$

leggi ogni legge è un'infinità di tautologie della forma $P \Leftrightarrow Q$, dove P e Q sono formule arbitrarie. Le leggi suggeriscono i rimpiazzamenti da effettuare per portare a termine una dimostrazione.