Somma di variabili binomiali

Se $X \sim B(n, p)$, $Y \sim B(m, p)$ e X e Y sono indipendenti,

$$X + Y \sim B(n + m, p).$$

Questo significa che

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

dove $X_1, \ldots, X_n$ sono variabili di Bernoulli di parametro p indipendenti.

Dimostrazione

Supponiamo che $Y \sim B(1, p)$:

$$\begin{aligned} P(X + Y = h) &= P(X = h, Y = 0) + P(X = h - 1, Y = 1) \\ &= \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} (1-p) + \binom{n}{h-1} p^{h-1} (1-p)^{n-h+1} p \\ &= \binom{n+1}{h} p^h (1-p)^{n-h+1} \end{aligned}$$

Per induzione si estende al caso generale.