Funzione generatrice dei momenti

Data la variabile aleatoria X, la sua funzione generatrice dei momenti è:

$$G_X : \mathbb{R} \to (0, +\infty]$$
$$G_X(t) = E[e^{tX}]$$

In particolare:

X discreta

$$G_X(t) = \sum_{x_i \in X} e^{tx_i} p(x_i);$$

X con densità

$$G_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) \mathrm{d}x,$$

che esistono (e^{tX} è positiva), ma possono essere $+\infty$.

Si chiama *dominio* l'insieme $\{t \in \mathbb{R} \mid G_X(t) < +\infty\}$. Contiene almeno 0: $G_X(0) = E[1] = 1$. se non contiene altri valori, G_X non è utile (Cauchy).

Teoremi

- se il dominio è diverso da $\{0\}$,

  $$G_X = G_Y \iff F_X = F_Y,$$

  cioè X e Y sono equidistribuite;

- se il dominio contiene un intorno di 0, allora X ha tutti i momenti e

  $$E[X^n] = G_x^{(n)}(0).$$

  Infatti:

  $$\frac{\mathrm{d}G_X}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}[e^{tX}] =^* E\left[\frac{\mathrm{d}e^{tX}}{\mathrm{d}t}\right] = E[Xe^{tX}],$$

  e in $t = 0$ diventa $E[X]$.

  Di solito non conviene calcolare così i momenti, un'eccezione è la variabile geometrica.

Regole di calcolo

- $G_{aX+b}(t) = G_X(at)e^{bt}$;
- $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ se X e Y sono indipendenti.

Dimostrazione

- $G_{aX+b}(t) = E[e^{t(aX+b)}] = e^{bt}E[e^{(at)X}] = G_X(at)e^{bt}$;
- anche e^{tX}, e^{tY} sono indipendenti, e:

  $$G_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX}e^{tY}] = E[e^{tX}]E[e^{tY}] = G_X(t)G_Y(t).$$