Momenti e varianza delle variabili gaussiane

Date $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(m, \sigma^2)$,

- X ha tutti i momenti:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x^n| \, e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x < +\infty;$$

- tutti i momenti dispari di X sono 0:

$$E[X^{2n+1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{dispari e conv.}} \mathrm{d}x = 0;$$

- $E[X^2] = 1$, $E[X^4] = 3$ (integrale per parti), in generale:

$$E[X^{2n+2}] = (2n+1)E[X^{2n}] \quad \text{(non ricordare)};$$

- $\mathrm{var}(X) = E[X^2] = 1$ perché $E[X] = 0$;
- $E[Y] = E[\sigma X + m] = m$;
- $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(\sigma X + m) = \sigma^2 \, \mathrm{var}(X) = \sigma^2$;