Proprietà del valore atteso

- se X e Y hanno valore atteso anche $X+Y$ lo ha, e

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \qquad E[aX+b] = aE[X] + b;$$

- ha sempre senso scrivere $E[|X|]$ (la serie è definita), X ha valore atteso se $E[|X|] < +\infty$, e in tal caso:

$$|E[X]| \leq E[|X|];$$

- $X \geq 0 \implies E[X] \geq 0$, quindi $X \geq Y \implies E[X] \geq E[Y]$;
- se X e Y sono indipendenti, $E[XY] = E[X]E[Y]$; se non lo sono, la regola non vale e XY potrebbe non avere valore atteso;
- $g(X)$ ha valore atteso se

$$\sum_{x_i} |g(x_i)|\, p(x_i) < +\infty \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, f(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

  e

$$E[X] = \sum_{x_i} g(x_i)p(x_i) \quad \text{o} \quad E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

  cioè

$$E[g(X)] = \sum_{x_i} g(x_i)p_X(x_i) = \sum_{y_j} y_j p_Y(y_j) = E[Y].$$

Dimostrazione della regola della somma

$$\begin{aligned}
E[|X+Y|] &= \sum_{x_i,y_j} |x_i + y_j|\, p(x_i,y_j) \\
&\leq \sum_{x_i,y_j} (|x_i| + |y_j|)p(x_i,y_j) \\
&= \sum_{x_i} |x_i| \sum_{y_j} p(x_i,y_j) + \sum_{y_j} |y_j| \sum_{x_i} p(x_i,y_j) \\
&= \sum_{x_i} |x_i|\, p_X(x_i) + \sum_{y_j} |y_j|\, p_Y(y_j) \\
&= E[|X|] + E[|Y|] < +\infty,
\end{aligned}$$

quindi $X+Y$ valore atteso. Ripetendo senza valore assoluto si trova $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.