Composizione di funzioni con variabili aleatorie

Data la variabile X con densità f_X diversa da 0 su un intervallo A e la funzione $g : A \to B$ biunivoca, derivabile e con inversa derivabile, allora si può trovare la distribuzione di $Y = g(X)$ con:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right| & y \in B \\ 0 & y \notin B \end{cases},$$

Se non valgono le ipotesi, si trova

$$F_Y(y) = P(h(X) \leq y)$$

e se, è derivabile, $f_Y = F'_Y$.

Esempi

$Y = aX + b$, $a > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{a}.$$

La formula è una generalizzazione di questo.

X uniforme su $[-1, 1]$, $Y = X^2$. Non si può usare la formula, si trova che $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ per $y \in [0, 1]$, 0 altrimenti.