Campioni gaussiani

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione di variabili gaussiane standard. Allora:

- $\overline{X}$ e $\sum(X_i - \overline{X})^2$ sono indipendenti;
- $\overline{X}$ ha densità $N(0, \frac{1}{n})$ e $\sum(X_i - \overline{X})^2$ ha densità $\chi^2(n-1)$;
- $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}}{S}$ ha densità $T(n-1)$.

Se la densità è $N(m, \sigma^2)$:

- $\overline{X}$ e $\sum(X_i - \overline{X})^2$ sono indipendenti;
- $\overline{X}$ ha densità $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ e $\sum \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ ha densità $\chi^2(n-1)$;
- $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-m}{S}$ ha densità $T(n-1)$.

Si nota che $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-m}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Per qualche motivo che vedremo poi è utile che per T non serva conoscere σ.

Dimostrazione

Terzo punto per $N(0,1)$:

- $\sqrt{n} \cdot \overline{X} = Z \sim N(0,1)$;
- S e $\overline{X}$ sono indipendenti per il punto 1;
- $S^2 = \frac{C_{n-1}}{n-1}$ con $C_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$ per il punto 2, quindi:

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}}{S} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{C_{n-1}}{n-1}}} \sim T(n-1).$$

Il caso generale si dimostra riportandosi a $N(0,1)$.