Convergenza in probabilità

La successione di v.a. $X_1, X_2, \ldots$ converge in probabilità ad X se, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Condizione sufficiente

Se

$$\lim_{n \to +\infty} E[X_n] = c \quad \wedge \quad \lim_{n \to +\infty} \operatorname{var}(X_n) = 0$$

allora $X_1, X_2, \ldots$ converge a c in probabilità. (varianza a 0 significa che si addensano intorno a c)

Dimostrazione

Chebyshev:

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{\varepsilon^2} = \frac{E[(X - E[X])^2]}{\varepsilon^2}$$

"con gli stessi passaggi si può vedere che":

$$P(|X - c| > \varepsilon) \leq \frac{E[(X - c)^2]}{\varepsilon^2},$$

e

$$\begin{aligned}
E[(X_n - c)^2] &= E[(X_n - E[X_n] + E[X_n] - c)^2] \\
&= E[(X_n - E[X_n])^2] + (E[X_n] - c)^2 + 2(E[X_n] - c) \underbrace{E[X_n - E[X_n]]}_{0} \\
&= \operatorname{var}(X_n) + (E[X_n] - c)^2,
\end{aligned}$$

quindi $\lim E[(X_n - c)^2] = 0$, e per la disuguaglianza $\lim P(|X - c| > \varepsilon) = 0$.