Indipendenza stocastica di eventi

A e B si dicono indipendenti se la conoscenza che B si è realizzato non influenza la probabilità che A si verifichi e viceversa.

$$P(A \mid B) = P(A) \iff P(B \mid A) = P(B)$$

$$\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

L'ultima uguaglianza è la definizione di indipendenza (preferita perché è simmetrica e vale anche se gli eventi sono trascurabili).

In particolare, sono sempre indipendenti gli esiti di prove ripetute nelle stesse condizioni.

Proprietà

- se A e B sono indipendenti, anche $\overline{A}$ e B lo sono;
- $P(A) = 0 \lor P(A) = 1 \implies A$ e B indipendenti;
- A e B incompatibili ($A \cap B = \varnothing$) e non trascurabili $\implies$ *non* indipendenti.

Dimostrazione

- $$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A})P(B) \end{aligned}$$
- $P(A) = 0 \implies P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$.

Più eventi

$A_1, \dots, A_n$ sono indipendenti se:

$$\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} \;.\; P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Non basta che siano indipendenti a due a due: se $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$ allora A, B, C sono indipendenti a due a due ma non globalmente.

Un caso tipico di eventi indipendenti sono gli esiti di prove ripetute nelle medesime condizioni.