Densità χ^2

La densità χ^2 a n gradi di libertà è la densità di $C_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ con $X_1, \ldots, X_n$ gaussiane standard indipendenti.

$\chi^2(n)$ è $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Quindi vale anche che

$$X \sim \chi^2(n) \ \wedge \ Y \sim \chi^2(m) \implies X + Y \sim \chi^2(n+m).$$

Dimostrazione

$X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$. Mostriamo che $X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \dfrac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \end{cases}$$

per la formula della densità di X^2. Densità $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \dfrac{1}{\sqrt{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \end{cases}$$

Sono uguali perché potrebbero differire solo di una costante, ma l'integrale su $\mathbb{R}$ è uguale (1, sono distribuzioni) quindi $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Aprossimazioni utili

Per n sufficientemente grande (≥ 80), visto che $E[X_i^2] = 1$ e $\mathrm{var}(X_i^2) = 2$,

- per la legge dei grandi numeri $\frac{C_n}{n}$ converge a 1 in probabilità, quindi:

$$\frac{C_n}{n} \simeq 1;$$

- per il teorema limite centrale,

$$\frac{C_n - n}{\sqrt{2n}} \approx N(0,1).$$