Variabili aleatorie

Una variabile aleatoria (o *casuale*) X è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ che permette di trasportare la probabilità dai sottoinsiemi di Ω ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$P_X : \wp(\mathbb{R}) \to [0, 1]$$

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) \overset{\text{not.}}{=} P(\{X \in A\}).$$

P_X è detta legge (o distribuzione) di probabilità della variabile X.

È una probabilità (sui sottoinsiemi di $\mathbb{R}$), infatti dati $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ con $A_i \cap A_j = \varnothing \;\; \forall i, j$, anche le controimmagini dei sottoinsiemi saranno disgiunte, e:

$$P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_X(A_n).$$

X si dice *discreta* se ha immagine finita o numerabile (o analogamente, se P_X è discreta), *con densità* (o *continue*) se lo è P_X.

Se $P_X = P_Y$, X e Y sono dette *equidistribuite* (isonome, somiglianti).

Ogni probabilità su $\mathbb{R}$ è la legge di probabilità di una variabile aleatoria: data la probabilità $Q : \mathbb{R} \to [0, 1]$, si possono costruire $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e X tali che $P_X = Q$.