Probabilità finitamente additiva

Data l'algebra di parti $\mathcal{A}$ sull'insieme Ω, la probabilità P è una funzione $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ tale che:

- $P(\Omega) = 1$;
- $A \cap B = \varnothing \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (*additività semplice*),

cioè è una funzione finitamente additiva di insiemi.

Se $P(A) = 1$, A è detto *quasi certo*; se $P(A) = 0$ è detto *trascurabile*.

Conseguenze

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, quindi $P(\varnothing) = 0$;
- $B \subseteq A \implies P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$;

Dimostrazione

- $$\begin{aligned} P(A \cup \overline{A}) &= P(\Omega) & \qquad \Omega &= A \cup \overline{A} \\ P(A) + P(\overline{A}) &= P(\Omega) & A \cap \overline{A} &= \varnothing \\ P(\overline{A}) &= 1 - P(A); \end{aligned}$$

- visto che $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$,

$$A = B \cup (A \setminus B) \implies P(A) = P(B) + P(A \setminus B);$$

- segue da $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$;