Probabilità

Data la σ-algebra (algebra di parti stabile anche per unione e intersezione numerabile) $\mathcal{A}$ sull'insieme Ω, la probabilità P è una funzione $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ tale che:

- $P(\Omega) = 1$;
- data la successione $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ di insiemi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

  (*additività numerabile* o σ-additività).

È un'estensione della probabilità finitamente additiva, per cui valgono le stesse proprietà.

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è detta *spazio di probabilità*.

Andare al limite

Data una successione di eventi *crescente*, cioè tale che $A_n \subseteq A_{n+1}$, e $A = \bigcup_n A_n = \lim A_n$,

$$P(A) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Infatti,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \\ P(A) &= \lim_{n\to\infty} P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \cdots + P(A_n \setminus A_{n-1}) && \text{(insiemi disgiunti)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \cancel{P(A_1)} + \cancel{P(A_2)} - \cancel{P(A_1)} + \cdots + P(A_n) - \cancel{P(A_{n-1})} \quad = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

Vale un risultato analogo per successioni *decrescenti*: se $B_n \supseteq B_{n+1}$ e $B = \bigcap_n B_n$,

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

Si può dimostrare che se P è finitamente additiva e va al limite allora è σ-additiva (esercizio).