Densità di Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Non ha momenti perché non ha momento primo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = 2\left[\log(1+x^2)\right]_0^{+\infty} = +\infty.$$

Funzione generatrici dei momenti: per $t > 0$,

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} \mathrm{d}x \\
&\geq \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} \mathrm{d}x \\
&\geq \frac{t}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x && e^{tx} = 1 + tx + \cdots \geq tx \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

per $t < 0$:

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} \mathrm{d}x \\
&\geq \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} \mathrm{d}x \\
&\geq \frac{|t|}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{|x|}{1+x^2} \mathrm{d}x && tx \geq 0,\ e^{tx} \geq |tx| \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Quindi $G_X(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ +\infty & t \neq 0 \end{cases}.$

La densità di Cauchy fa schifo e serve solo per i controesempi.