Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria

Data la variabile aleatoria X, la sua funzione di ripartizione $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ (c.d.f., cumulative distribution function) è data da:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P_X((-\infty, x])$$

Calcolo

Se X è discreta con immagine $\{x_i\}_{i \in I}$,

$$F_X(x) = P(\{x_i \mid x_i \leq x\}) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

se è con distribuzione f:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \mathrm{d}x,$$

quindi è continua (ma ci sono funzioni di ripartizioni continue associate a variabili non con densità).

Proprietà

- debolmente crescente;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- continua a destra in ogni punto: $F(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} F(x+h)$

Data una funzione $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ con queste proprietà, $\exists! Q$ probabilità su $\mathbb{R}$ tale che $F(x) = Q((-\infty, x])$, quindi:

- nota F_X, si può ricostruire P_X: per esempio se la variabile è discreta e nei punti di discontinuità delle variabili con densità l'ampiezza dei salti $(F(x) - F_-(x))$ è la probabilità del punto corrispondente, negli intervalli continui delle variabili con densità $f(x) = F'(x)$;
- se $F_X = F_Y$, allora X e Y sono equidistribuite.

Dimostrazione

Di $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (non è importante che ve le ricordiate).
Prendiamo una successione $x_1 > x_2 > \dots$ con $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ e poniamo

$$A_n = X^{-1}((-\infty, x_n]).$$

Segue che $A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq A_{n+2} \supseteq \dots$, e quindi:

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Vale anche che:

$$F(x_n) = P(X^{-1}((-\infty, x_n]) = P(A_n)$$

e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}((-\infty, x_n]) = X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]\right) = X^{-1}(\varnothing) = \varnothing,$$

quindi:

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) \overset{\text{cont.}}{=} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\varnothing) = 0.$$

Questo vale per tutte le successioni decrescenti che tendono a $-\infty$, perciò $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Esempi