Momenti (variabili aleatorie)

Il momento n-esimo ($n \geq 1$) esiste se $E[|X|^n] < +\infty$, e in tal caso vale $E[X^n]$, cioè:

- per variabili discrete,
$$\sum_{x_i} x_i^n p(x_i).$$
Se X discreta ha immagine finita, allora ha tutti i momenti (e.g. binomiale);
- per variabili continue,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) \mathrm{d}x.$$
Se f è nulla fuori da un intervallo limitato, allora ha tutti i momenti.

Il momento primo è il valore atteso.

Proprietà fondamentale

Se X ha momento n-esimo, allora ha anche momento m-esimo, con $m < n$:

$$E[|X|^n] < +\infty \implies E[|X|^m] < +\infty.$$

Dimostrazione

Usiamo:
$$|x|^m \leq |x|^n + 1.$$

Caso con densità:

$$\begin{aligned} E[|X|^m] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m f(x) \mathrm{d}x \\ &\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n f(x) \mathrm{d}x}_{<+\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x}_{1}. \end{aligned}$$