Legge (debole) dei grandi numeri

Data la successione $X_1, X_2, \dots$ di v.a. indipendenti, equidistribuite, con momento secondo, e con valore atteso $\mu = E[X_i]$, allora

$$\forall \epsilon > 0 \quad . \quad \lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu \right| > \epsilon \right) = 0,$$

cioè la media aritmetica delle prime n variabili *converge in probabilità* al comune valore atteso.

In realtà è sufficiente che:

- le variabili siano incorrelate (anziché indipendenti), e
- $E[X_i] = \mu$ e $\mathrm{var}(X_i) \leq M$ per ogni X_i (anziché equidistribuite).

Dimostrazione

Sia $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Allora:

$$E[\overline{X}_n] = \frac{n\mu}{n} = \mu \qquad \mathrm{var}(\overline{X}_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

La varianza converge a 0 e il valore atteso a μ, quindi $X_1, X_2, \dots$ converge in probabilità a μ.