Indipendenza di variabili aleatorie

X e Y sono indipendenti se $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ gli eventi $X^{-1}(A)$ e $Y^{-1}(B)$ sono indipendenti, cioè se:

$$P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A))P(Y^{-1}(B)).$$

Funzioni di variabili indipendenti sono indipendenti: X, Y indipendenti $\implies$ $h(X), k(Y)$ indipententi:

$$h(X)^{-1}(A) = X^{-1}(h^{-1}(A)) \quad k(Y)^{-1}(B) = Y^{-1}(k^{-1}(B))$$

quindi lo sono per definizione di indipendenza di X e Y. Vale anche per più variabili: se X, Y, Z sono indipendenti $h(X, Y)$ e $k(Z)$ sono indipendenti (ma non $h(X, Y)$ e $k(X, Z)$).

Caratterizzazione

X, Y discrete sono indipendenti se e solo se:

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j).$$

X, Y con densità sono indipendenti se e solo se:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Dimostrazione

X, Y discrete $A = \{x_i\}, B = \{y_j\}$

$$\begin{gathered} P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\} \\ P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} \\ p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_y(y_j) \end{gathered}$$

Viceversa,

$$\begin{aligned} P\{X \in A, Y \in B\} &= P\{(X, Y)^{-1}(A \times B)\} \\ &= \sum_{(x_i, y_j) \in A \times B} p(x_i, y_j) \\ &= \sum_{(x_i, y_j) \in A \times B} p_X(x_i)p_Y(y_j) \\ &= \left(\sum_{x_i \in A} p_X(x_i)\right)\left(\sum_{y_j \in B} p_Y(y_j)\right) \\ &= P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\} \end{aligned}$$