

# Verifica delle ipotesi (livello, potenza, p-value)

$X_1, \dots, X_n$  campione con legge dipendente da un parametro  $\theta$  non conosciuto. Abbiamo un'ipotesi sul valore di  $\theta$ , e vogliamo costruire un test per determinare se l'ipotesi è accettabile sulla base di una statistica campionaria  $g(\omega) = g(x_1, \dots, x_n)$  che fornisce una stima del valore del parametro a partire da una misurazione.

## Formalizzazione delle ipotesi

- si divide l'insieme dei parametri  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$  (e.g.  $[0, +\infty)$  per la varianza o  $[0, 1]$  per  $p$ ) nei sottoinsiemi  $\Theta_0$  (*parametri dell'ipotesi*) e  $\Theta_1$  (*parametri dell'alternativa*).
- si definisce un evento  $C \subseteq \Omega$  (insieme di risultati) che porta a rifiutare l'ipotesi (*regione critica*).  $A = \overline{C}$  è la *regione di accettazione*.  
Generalmente  $A$  è tale che  $\Theta_0 \subset g(A)$ , cioè accettiamo l'ipotesi anche per alcuni parametri dell'alternativa, per limitare gli errori di prima specie.

## Errori

**di prima specie** rifiutare l'ipotesi quando è corretta;

**di seconda specie** accettarla quando non lo è.

## Livello

Il test è di livello  $\alpha$  (tipicamente 1-5%) se:

$$\forall \theta \in \Theta_0 \quad . \quad P_\theta(C) \leq \alpha$$

cioè la probabilità di rifiutare l'ipotesi quando è vera (errore di prima specie) è limitata da  $\alpha$ .

## Potenza

Si chiama potenza del test la funzione:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &\rightarrow [0, 1] \\ \theta &\mapsto P_\theta(C) \end{aligned}$$

ovvero è la capacità di accorgersi che l'ipotesi non è soddisfatta.

**Osservazione:** per abbassare il livello occorre ridurre la regione critica, e ciò rende più facile accettare l'ipotesi (abbassa la potenza).

## Curva operativa

$$\begin{aligned} \Theta &\rightarrow [0, 1] \\ \theta &\mapsto P_\theta(A) = 1 - P_\theta(C) \end{aligned}$$

Il test è di livello  $\alpha$  se la curva operativa è  $\geq 1 - \alpha$  su  $\Theta_0$ , la potenza è alta se la curva è bassa su  $\Theta_1$ .

Idealmente vogliamo livello basso e potenza alta, quindi la curva molto vicina a 1 su  $\Theta_0$ , a 0 su  $\Theta_1$ . Nella pratica bisogna trovare un compromesso, visto che migliorare la potenza peggiora il livello e viceversa; inoltre la curva solitamente è continua, quindi non c'è un salto brusco tra  $\Theta_0$  e  $\Theta_1$ .

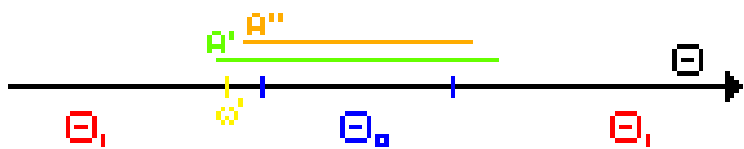
## Utilizzo dei dati e p-value

Una volta definito  $C$  in base al livello  $\alpha$  e raccolti i dati, si può stabilire se il test è superato ( $\omega \in A$ ).

Possiamo anche calcolare il p-value, cioè il valore  $\bar{\alpha}$  tale che se  $\alpha < \bar{\alpha}$  l'ipotesi è accettata al livello  $\alpha$ , se  $\alpha > \bar{\alpha}$  è rifiutata.

- un p-value basso corrisponde ad un'ipotesi poco plausibile e viceversa (nella pratica,  $< 0.1$  scartiamo  $> 0.3$  molto plausibile);
- il p-value ha senso solo relativamente ad un'ipotesi;
- si calcola solo dopo aver fatto l'esperimento (dipende dai dati).

Definizione alternativa: probabilità che l'eventuale rifiuto dell'ipotesi sia dovuto al caso.



Aumentando il livello diminuisce la regione di accettazione; qui  $\alpha' < \alpha''$ . Un p-value basso significa quindi che  $\omega' = g(\omega)$  è lontano da  $\Omega_0$ .