

Somma di variabili di Poisson

Date le variabili di Poisson indipendenti X e Y , di parametro rispettivamente λ e μ , vale che $X + Y$ è una variabile di Poisson di parametro $\lambda + \mu$.

Dimostrazione

$$\{X + Y = n\} = \bigcup_{h=0}^n \{X = h, Y = n - h\},$$

quindi:

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{h=0}^n P(X = h)P(Y = n - h) && (X, Y \text{ indipendenti}) \\ &= \sum_{h=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^h}{h!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-h}}{(n-h)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \underbrace{\sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!(n-h)!} \lambda^h \mu^{n-h}}_{\text{binomio di Newton}} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda + \mu)^n. \end{aligned}$$

Anche con g.d.m.