Esercizi orale ECC

1. **Caratterizzare l'insieme degli indici delle funzioni il cui dominio è un singolo elemento, definito come $\boldsymbol{I = \{\, i \mid \#dom(\varphi_i) = 1\} = \{\, i \mid \exists n.\, dom(\varphi_i) = \{n\}\,\}}$.**

Possiamo dire che $\emptyset \neq I \neq \mathbb{N}$ e I è un insieme di indici che rappresentano funzioni, quindi <u>non è ricorsivo</u>.
Possiamo fare la riduzione $K \leq_{rec} I$:

- Consideriamo la funzione Ψ:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & x \in K \wedge y = n \\ indefinita, & altrimenti \end{cases}$$

- Usando il teorema del parametro, sia i tale che $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{i}}(x,y) = \varphi_{\boldsymbol{s(i,x)}}(y)$.
- Ponendo $f(x) = s(i,x)$ si ottiene $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{f(x)}}(y)$.
- Quindi ci ritroviamo con due casi:
  - Se $x \in K$ questo implica che $\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} 1, & se\ y = n \\ indefinita, & se\ x \neq n \end{cases}$, quindi $dom\left(\varphi_{f(x)}\right) = \{n\}$ e quindi $f(x) \in I$.
  - Se $x \notin K$ la $\varphi_{\boldsymbol{f(x)}}$ è la funzione ovunque indefinita, quindi $f(x) \notin I$.

Possiamo anche fare la riduzione $\overline{K} \leq_{rec} I$, dalle proprietà delle riduzioni equivale a fare $K \leq_{rec} \overline{I}$, e lo facciamo usando una funzione di riduzione leggermente diversa da quella usata sopra:

- Consideriamo la funzione Ψ:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & x \in K \vee y = n \\ indefinita, & altrimenti \end{cases}$$

- Usando il teorema del parametro, sia i tale che $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{i}}(x,y) = \varphi_{\boldsymbol{t(i,x)}}(y)$.
- Ponendo $g(x) = t(i,x)$ si ottiene $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{g(x)}}(y)$.
- Quindi ci ritroviamo con due casi:
  - Se $x \in K$ questo implica che $\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}(y) = 1$ quindi $dom\left(\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}\right) = \mathbb{N}$ e quindi $g(x) \notin I$.
  - Se $x \notin K$ la $\varphi_{\boldsymbol{f(x)}}(y) = \begin{cases} 1, & se\ y = n \\ indefinita, & se\ x \neq n \end{cases}$ per cui $dom\left(\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}\right) = \{n\}$, quindi $f(x) \in I$.

Siccome $\overline{K} \leq_{rec} I$ allora I <u>non è nemmeno ricorsivamente enumerabile</u>.

2. **Caratterizzare $\boldsymbol{I = \{\, i \mid dom(\varphi_i) = \{42\}\,\}}$**

Possiamo dire che $\emptyset \neq I \neq \mathbb{N}$ e I è un insieme di indici che rappresentano funzioni, quindi <u>non è ricorsivo</u>.
Possiamo fare la riduzione $K \leq_{rec} I$:

- Consideriamo la funzione Ψ:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & x \in K \wedge y = 42 \\ indefinita, & altrimenti \end{cases}$$

- Usando il teorema del parametro, sia i tale che $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{i}}(x,y) = \varphi_{\boldsymbol{s(i,x)}}(y)$.
- Ponendo $f(x) = s(i,x)$ si ottiene $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{f(x)}}(y)$.
- Quindi ci ritroviamo con due casi:
  - Se $x \in K$ questo implica che $\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} 1, & se\ y = 42 \\ indefinita, & se\ x \neq 42 \end{cases}$, quindi $dom\left(\varphi_{f(x)}\right) = \{42\}$ e quindi $f(x) \in I$.
  - Se $x \notin K$ la $\varphi_{\boldsymbol{f(x)}}$ è la funzione ovunque indefinita, quindi $f(x) \notin I$.

Possiamo anche fare la riduzione $\overline{K} \leq_{rec} I$, dalle proprietà delle riduzioni equivale a fare $K \leq_{rec} \overline{I}$, e lo facciamo usando una funzione di riduzione leggermente diversa da quella usata sopra:

- Consideriamo la funzione Ψ:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & x \in K \vee y = 42 \\ indefinita, & altrimenti \end{cases}$$

- Usando il teorema del parametro, sia i tale che $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{i}}(x,y) = \varphi_{\boldsymbol{t(i,x)}}(y)$.
- Ponendo $g(x) = t(i,x)$ si ottiene $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{g(x)}}(y)$.
- Quindi ci ritroviamo con due casi:
  - Se $x \in K$ questo implica che $\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}(y) = 1$ quindi $dom\left(\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}\right) = \mathbb{N}$ e quindi $g(x) \notin I$.
  - Se $x \notin K$ la $\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}(y) = \begin{cases} 1, \ se\ y = 42 \\ indefinita,\ \ se\ x \neq 42 \end{cases}$ per cui $dom\left(\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}\right) = \{42\}$, quindi $g(x) \in I$.

Siccome $\overline{K} \leq_{rec} I$ allora I <u>non è nemmeno ricorsivamente enumerabile</u>.

3. Caratterizzare $\boldsymbol{I} = \{\ \boldsymbol{i} \mid \boldsymbol{dom}(\varphi_{\boldsymbol{i}}) = \boldsymbol{insieme\ dei\ numeri\ primi}\}$

Il teorema 1.10.4 ci dice che I è un insieme ricorsivamente enumerabile se e solamente se è vuoto oppure è l'immagine di una funzione calcolabile totale. Ovvero I viene generato attraverso una funzione calcolabile totale.
Questo insieme è ricorsivamente enumerabile perché esiste una funzione calcolabile totale che associa i naturali ai numeri primi, poiché i numeri primi sono un insieme infinito e ordinato.

4. Caratterizzare $\boldsymbol{I} = \{\ \boldsymbol{i} \mid \#\boldsymbol{dom}(\varphi_{\boldsymbol{i}}) = \#\mathbb{N}\} = \{\boldsymbol{x} \mid \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}.\ \varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n}) \downarrow\}$

Notiamo che $I = INF$, e possiamo dimostrare che $\overline{K} \leq_{rec} INF$:
- Consideriamo la funzione Ψ:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, se\ \varphi_{\boldsymbol{x}}(x)\ non\ converge\ in\ y\ passi \\ \quad indefinita,\ \ altrimenti \end{cases}$$

- Ψ è calcolabile parziale, quindi per il teorema del parametro esiste g calcolabile totale iniettiva, definita in modo tale che $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_{\boldsymbol{i}}(x,y) = \varphi_{\boldsymbol{t(i,x)}}(y) = \varphi_{\boldsymbol{g(x)}}(y)$.
- Ci ritroviamo quindi nei due casi:
  - $x \in \overline{K}$ allora $\nexists y.\ \varphi_{\boldsymbol{g(x)}}(x) \downarrow$ quindi $\varphi_{\boldsymbol{g(x)}} = \lambda y.1$ per cui $dom\left(\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}\right)$ è infinito, quindi $g(x) \in INF$.
  - $x \notin \overline{K} \Leftrightarrow x \in K$ per cui $\exists y.\ \varphi_{\boldsymbol{g(x)}}(x) \downarrow$ quindi $\varphi_{\boldsymbol{g(x)}} = \lambda y.indefinita$, per cui $dom\left(\varphi_{\boldsymbol{g(x)}}\right)$ è finito, quindi $g(x) \notin INF$.

Possiamo quindi dire che INF <u>non è ricorsivamente enumerabile</u>. Siccome sappiamo che anche l'insieme $FIN = \overline{INF}$ non è ricorsivamente enumerabile, allora INF <u>non è nemmeno ricorsivo</u>.

5. Sotto quali condizioni $\boldsymbol{A} \leq_{\boldsymbol{rec}} \overline{\boldsymbol{A}}$? Si può fare per un insieme $\mathcal{RE}$ e non $\mathcal{R}$?

Ricordiamo le definizioni:
- Un insieme I è ricorsivo (ovvero decidibile) se e solo se la sua funzione caratteristica $\mathrm{X}_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$ è calcolabile totale.
- Un insieme I è ricorsivamente enumerabile (ovvero semi-decidibile) se e solo se $\exists i.\ I = dom(\varphi_{\boldsymbol{i}})$. La sua funzione caratteristica è quindi definita come $\mathrm{X}_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ indefinita, & altrimenti \end{cases}$

Per fare la riduzione $\boldsymbol{A} \leq_{\boldsymbol{rec}} \overline{\boldsymbol{A}}$ nel caso in cui A sia ricorsivo basta invertire l'output della funzione caratteristica per ottenere quella di $\overline{\boldsymbol{A}}$, nel caso in cui A sia ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo questa cosa ovviamente non funziona a causa della funzione caratteristica non definita in ogni punto.

6. Dimostrare che $\boldsymbol{INF} \leq_{\boldsymbol{rec}} \boldsymbol{CONST}$

$\{x \mid dom(\varphi_x)\ \text{è}\ infinito) = INF \leq_{rec} CONST = \{x \mid \varphi_x\ \text{è}\ totale\ e\ costante\} = \{x \mid \exists n \forall y\ \varphi_x(y) = n\}$, procediamo seguendo la falsa riga della dimostrazione del teorema di ricorsione (Kleene II).
- Definiamo una funzione Ψ:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists \mathrm{z} > \mathrm{y}.\, \varphi_x(z) \downarrow \\ \text{indefinita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- È calcolabile? Sì, quindi per la tesi di Church-Turing ha un indice: $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_v(x,y)$.
- Per il teorema del parametro possiamo scrivere: $\varphi_v(x,y) = \varphi_{s(v,x)}(y)$
- Siccome v è una costante possiamo dire che $s(x,y) = f(x)$ e quindi: $\varphi_{s(v,x)}(y) = \varphi_{f(x)}(y)$
- Quindi troviamo due casi:
  - $x \in INF$ allora $\varphi_{f(x)}(y) = \Psi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ allora vale il primo ramo della definizione in cui $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda y.1$ quindi $f(x)$ è indice di una funzione costante e allora $f(x) \in CONST$
  - $x \notin INF$allora $\exists y.\, \varphi_{f(x)}(y)$ è indefinita quindi questa $\varphi_{f(x)}$ non è totale, per cui $f(x) \notin CONST$

7. Dimostrare che $TOT \leq_{rec} INF$

$\{x|dom(\varphi_x) = \mathbb{N}) = TOT \leq_{rec} INF = \{x|dom(\varphi_x)$ è $infinito\}$, procediamo seguendo la falsa riga della dimostrazione del teorema di ricorsione (Kleene II).

- Definiamo una funzione Ψ:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists \mathrm{z} < \mathrm{y}.\, \varphi_x(z) \downarrow \\ \text{indefinita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- È calcolabile? Sì, con il buon ordinamento di $\mathbb{N}$, cioè che $\forall y.\, [0,y] \cap \mathbb{N}$ è finito, per cui posso testare su tutti i numeri se la φ_x converge.
- Per la tesi di Church-Turing ha un indice: $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_v(x,y)$.
- Per il teorema del parametro possiamo scrivere: $\varphi_v(x,y) = \varphi_{s(v,x)}(y)$
- Siccome v è una costante possiamo dire che $s(v,x) = f(x)$ e quindi: $\varphi_{s(v,x)}(y) = \varphi_{f(x)}(y)$
- Quindi troviamo due casi:
  - $x \in TOT$ allora $\varphi_{f(x)}(y) = \Psi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ allora vale il primo ramo della definizione in cui $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda y.1$ quindi $f(x)$ è indice di una funzione costante, allora $f(x)$ ha dominio infinito, quindi$f(x) \in INF$
  - $x \notin TOT\ \exists \bar{y}.\, \forall \mathrm{y} > \bar{y}.\, \varphi_{f(x)}(y)$ è indefinita quindi il dominio di questa $\varphi_{f(x)}$ è incluso in $[0,\bar{y}]$, per cui $f(x) \notin INF$

8. Osservazione $TOT \leq_{rec} INF$: perché la funzione identità non compie la riduzione?

Vediamo i due casi:

- $x \in TOT \Rightarrow f(x) \in INF$? Se $\mathrm{dom}(\varphi_x) = \mathbb{N}$, e usiamo la funzione identità allora sappiamo che $\varphi_{f(x)} = \varphi_x$, per cui $\mathrm{dom}(\varphi_{f(x)}) = \mathbb{N}$ quindi è infinito.
- $x \notin TOT \Rightarrow f(x) \notin INF$? Qui cerco una φ_x che mi renda falsa questa implicazione, per cui scelgo una funzione non definita su tutto l'insieme $\mathbb{N}$: per esempio la funzione che divide per 2, che è definita solo sui numeri pari: $\varphi_x\,(y) = \begin{cases} y/2, & se\ 2|y \\ indefinita, & altrimenti \end{cases}$

  Quindi avremo che $\mathrm{dom}(\varphi_x) = pari \neq \mathbb{N}$ quindi $x \notin TOT$.

  Siccome voglio usare la funzione identità per fare la riduzione ho $\varphi_{f(x)} = \varphi_x$ e questo implica $\mathrm{dom}(\varphi_x) = pari$ che è un insieme infinito, per cui $f(x) \in INF$ e questo non va bene.

Quindi la funzione identità non può compiere la riduzione di TOT a INF.

9. Dimostrare che $TOT \leq_{rec} CONST$

$\{x|dom(\varphi_x) = \mathbb{N}) = TOT \leq_{rec} CONST = \{x|\varphi_x$ è $totale\ e\ costante\} = \{x|\exists n \forall y\ \varphi_x(y) = n\}$, come sempre ricalchiamo la dimostrazione del teorema di ricorsione:

- Definiamo una funzione Ψ:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists \mathrm{z} < \mathrm{y}.\, \varphi_x(z) \downarrow \land \varphi_x(z) = \varphi_x(z+1) \\ \text{indefinita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  La seconda condizione sul primo ramo ci garantisce che la φ_x sia costante (la prima condizione invece è quella per la totalità).
- È calcolabile? Sì, quindi per la tesi di Church-Turing ha un indice $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varphi_v(x,y)$.

- Per il teorema del parametro possiamo scrivere: $\varphi_v(x,y) = \varphi_{s(v,x)}(y)$
- Siccome v è una costante possiamo dire che $s(v,x) = f(x)$ e quindi: $\varphi_{s(v,x)}(y) = \varphi_{f(x)}(y)$
- Quindi troviamo due casi:
  - $x \in TOT$ allora $\varphi_{f(x)}(y) = \Psi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ allora vale il primo ramo della definizione in cui $\Psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \lambda y.1$ quindi $f(x)$ è indice di una funzione costante e allora $f(x) \in CONST$

$x \notin TOT$ $\exists \bar{y}. \forall \mathrm{y} > \bar{y}. \varphi_{f(x)}(y)$ è indefinita quindi il dominio di questa $\varphi_{f(x)}$ è incluso in $[0, \bar{y}]$, per cui $f(x)$ non è costante, perché è indefinita da $\bar{y}$ in poi, quindi $f(x) \notin CONST$

10. Dimostrare l'equivalenza tra le due definizioni di $\mathcal{RE}$ (dimostrazione teorema 1.10.4)

1. I è ricorsivamente enumerabile $\Leftrightarrow \exists i. I = dom(\varphi_i)$
2. I è ricorsivamente enumerabile $\Leftrightarrow$ $I = \begin{cases} \emptyset \\ \exists f \text{ calcolabile totale} \mid I = imm(f) \end{cases}$

La dimostrazione di 1 $\Rightarrow$ 2 è facile.

Quella di 2 $\Rightarrow$ 1 è più complicata perché consiste nella costruzione di una funzione totale calcolabile f tale che $I = imm(f)$ a partire da φ_i. Si cerca un elemento di I mediante un procedimento a coda di colomba, in cui l'indice di riga m indica il numero di passi del calcolo di φ_i e l'indice di colonna n il suo argomento.

		n = argomenti di M_i					
		0	1	2	3	4	5
m = # passi eseguiti da M_i	0	0	2	5	9	↗	
	1	1	4	8	↗		
	2	3	7	12	↗		
	3	6	11	↗			
	4	10	↗				
	5	↗					
	6						

Più precisamente si eseguono m passi nel calcolo di $\varphi_i(n)$, finché per qualche valore di m e dell'argomento, sia $\bar{n}$, il calcolo si arresta; ovvero $\varphi_i(\bar{n}) \downarrow$ in m passi e quindi $\bar{n} \in I = dom(\varphi_i)$.
A questo punto, rappresentando con $\langle m, n \rangle$ il valore della codifica della coppia (m, n), si inizia un secondo procedimento a coda di colomba eseguendo $\varphi_i(n)$ per m passi: se tale calcolo si arresta, allora si pone $f(\langle m, n \rangle) = n$ (ovviamente $n \in dom(\varphi_i) = I$), altrimenti si pone $f(\langle m, n \rangle) = \bar{n}$ (per quanto detto prima $\bar{n} \in I$); si itera il procedimento incrementando la codifica $\langle m, n \rangle$, ovvero considerando $\langle m, n \rangle + 1$. Si generano così tutti gli elementi di I.

11. Dimostrare se $A \leq_{rec} \bar{A}$ con A i.i.r.f. (risposta: se A è vuoto no, se A è $\mathbb{N}$ no, al caso generale no)

Definizione di riduzione: $A \leq_{rec} \bar{A} \Leftrightarrow \exists f$ *calcolabile totale* $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in \bar{A}$
Se A e $\bar{A}$ sono entrambi ricorsivi basta invertire la funzione caratteristica di A per effettuare la riduzione.
Se A fosse ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo non è possibile fare la riduzione: è il problema equivalente a fare $K \leq_{rec} \bar{K}$ che sappiamo non essere possibile perché $\bar{K} \not\leq_{rec} K$, perché se fosse vera $\bar{K}$ sarebbe ricorsivamente enumerabile e sappiamo che ciò non è possibile perché implicherebbe che K sia ricorsivo, che sappiamo non essere vero. Quindi $K \not\leq_{rec} \bar{K}$ e anche l'insieme $A \not\leq_{rec} \bar{A}$ nel caso in cui sia ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo.

12. Quando un insieme di indici che rappresentano funzioni è ricorsivo? Quando e perché non lo è?

Dal lemma pre-Rice (1.10.19) si può dedurre che un insieme di indici che rappresenta funzioni può essere ricorsivo solamente se è l'insieme vuoto $\emptyset$ o è l'insieme $\mathbb{N}$. Se non è uno di questi due allora si riduce a K o $\bar{K}$ quindi non è ricorsivo, poiché K è solamente ricorsivamente enumerabile (e non ricorsivo) e $\bar{K}$ non è né ricorsivamente enumerabile né ricorsivo, per cui nemmeno l'insieme i.i.r.f. considerato non può essere ricorsivo (dalla proprietà 1.10.3(ii): $I, \bar{I}$ *sono ricorsivamente enumerabili* $\Leftrightarrow I, \bar{I}$ *sono ricorsivi*).

13. **Sotto quali condizioni $I \leq_{logspace} \bar{I}$? (risposta: non è possibile se I sta in $\mathcal{NP}$, basta una condizione sufficiente, ovvero se $\bar{I}$ è completo per $\mathcal{P}$)**

$\mathcal{NP}$ non è chiuso rispetto al complemento, e non sappiamo se le riduzioni in $logspace$ classificano $\mathcal{NP}$ e $co - \mathcal{NP}$, per cui non si può fare la riduzione $I \leq_{logspace} \bar{I}$ se I sta in $\mathcal{NP}$.
$\mathcal{P}$ è chiuso rispetto al complemento, il che vuol dire che se I sta in $\mathcal{P}$ allora anche $\bar{I}$ sta in $\mathcal{P}$. In questo caso è sufficiente che $\bar{I}$ sia completo per $\mathcal{P}$ perché si possa eseguire la riduzione $I \leq_{logspace} \bar{I}$.

14. **Cosa sta tra $\mathcal{P}$ ed EXP**

La tesi di Cook-Karp ci dice che $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$. Dal corollario del teorema di gerarchia in tempo e spazio (3.4.2) sappiamo che $\mathcal{P} \subset EXP$, ovvero che $\mathcal{P}$ è un sottoinsieme di EXP ed è diverso da esso, e dal teorema 3.4.5 sappiamo che $\mathcal{NP} \subseteq EXP$. Per cui per rispondere alla domanda possiamo dire tra le classi di complessità $\mathcal{P}$ ed EXP c'è la classe $\mathcal{NP}$.

15. **Dimostrare che $LOGSPACE \subseteq \mathcal{P}$ (teorema 3.2.18, lo spazio limita il tempo; prendiamo una MdT I/O a 3 nastri: la dimensione del nastro di lavoro è $log(|x|)$)**

Poiché il problema I appartiene a $LOGSPACE$ c'è una macchina di Turing M che decide ogni sua istanza $x \in I$ in $O(\log|x|)$. Quante configurazioni posso avere sul nastro di lavoro? Dipende da quanti simboli ho sulla macchina. Poniamo x input e la sua lunghezza $|x| = n$:

- Avrò $\#\Sigma^{\log(n)}$ nastri diversi.
- Il cursore può trovarsi in $\log(n)$ posizioni diverse in ciascuno stato (gli stati sono $\#Q$).
- Il cursore sta anche nell'input in $|x| = n$ posizioni diverse.

Quindi il nastro di lavoro potrà avere $n \cdot \log(n) \cdot \#Q \cdot \#\Sigma^{\log(n)}$ configurazioni non terminali diverse.
Per dimostrare che $LOGSPACE \subseteq \mathcal{P}$ devo trovare k tale che:

$$n \cdot \log(n) \cdot \#Q \cdot \#\Sigma^{\log(n)} \leq n^k$$

Applicando il logaritmo a entrambi i membri si ottiene:

$$\log(n) + \log(\log(n)) + \log(\#Q) + \log(\#\Sigma^{\log(n)}) \leq \log(n^k)$$
$$\log(n) + \log(\log(n)) + \log(\#Q) + \log(n) \cdot \log(\#\Sigma) \leq k \cdot \log(n)$$

da cui posso eliminare $\log(\log(n))$ poiché molto piccolo e $\log(\#Q)$ perché è una costante,

$$\log(n) + \log(n) \cdot \log(\#\Sigma) \leq k \cdot \log(n)$$

e poi semplificare per $\log(n)$ e ottenere:

$$1 + \log(\#\Sigma) \leq k$$

Siccome 1 è una costante otteniamo il risultato che basta usare un numero di nastri $k \geq \log(\#\Sigma)$ maggiore o uguale alla cardinalità dell'insieme dei simboli.

16. **$\mathcal{NP}$ è chiuso per il complemento?**

$\mathcal{NP}$ è chiuso rispetto ad unione, intersezione, concatenazione, stella di Kleene e inversione. Non è noto se $\mathcal{NP}$ sia chiuso rispetto al complemento, poiché non si può dire se $\mathcal{NP} = co - \mathcal{NP}$. $\mathcal{NP}$ è la classe dei problemi che raggiungono una computazione terminante su macchine di Turing non deterministiche in tempo polinomiale. Per dire se un problema appartiene alla classe $co - \mathcal{NP}$ bisognerebbe avere la certezza che nessuna computazione su macchina non deterministica termina, però questo non può essere verificato in tempo polinomiale.

17. **Cosa si può dire di $I \cup J$ con $I, J \subset \mathcal{NP}$**

Siccome $\mathcal{NP}$ è chiuso rispetto all'unione possiamo dire che l'insieme ottenuto dall'unione $I \cup J$ è anch'esso un sottoinsieme di $\mathcal{NP}$.

18. **Cosa si può dire di $I \cap J$ con $I, J \subset \mathcal{NP}$**

Siccome $\mathcal{NP}$ è chiuso rispetto all'intersezione possiamo dire che l'insieme ottenuto dall'intersezione $I \cap J$ è anch'esso un sottoinsieme di $\mathcal{NP}$.

19. $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ è un'algebra booleana? (sì)

- Elemento neutro: l'insieme vuoto $\emptyset$ appartiene a $\mathcal{P}$
- $\mathcal{P}$ è chiuso rispetto all'unione, l'intersezione e il complemento.

Quindi è un'algebra booleana.

20. Esiste $\boldsymbol{I}$ tale che $\boldsymbol{I \leq_{logspace} CIRCUIT - VALUE}$? Esiste $\boldsymbol{J}$ tale che $\boldsymbol{CIRCUIT - VALUE \leq_{logspace} J}$?

$CIRCUIT - VALUE$ è $\leq_{logspace} - completo$ per $\mathcal{P}$, per cui tutti problemi contenuti in $\mathcal{P}$ si riducono ad esso, per la definizione di completezza.
$CIRCUIT - VALUE$ può ridursi ai problemi di tutte le classi di complessità $\mathcal{C}$ tali che $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$ e tali che $\leq_{logspace}$ classifichino $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$.

21. Dire in quale classe sta il l'isomorfismo tra grafi e dimostrarlo

Due grafi G e H si dicono isomorfi se i nodi di G possono essere "rinominati" in modo tale che G risulti identico ad H, formalizzato come segue:

$$ISO = \{\langle G, H \rangle | G\ ed\ H\ sono\ grafi\ isomorfi\}$$

Il problema ISO sta in $\mathcal{NP}$, però non si è ancora riusciti a fornire un algoritmo di tempo polinomiale per questo problema, sia nel fornire una dimostrazione che esso risulta $\mathcal{NP} - completo$.
Il procedimento per rendere G isomorfo rispetto ad H dovrei generare tutte le permutazioni dei nodi di G e per ognuna di esse verificare se l'insieme dei nodi e l'insieme degli archi, sono esattamente uguali a quelli di H.