Convergenza

Nello studio dei processi di convergenza quello che accade al tempo k (es $c_{k+1}-\alpha$ rispetto a $c_k-\alpha$) non interessa. L'interesse è sull'evoluzione del processo a regime (limite).

Supponiamo di considerare una convergenza lineare ideale dove

$$e_{k+1} = \ell \, e_k \qquad (0<\ell<1)$$

Se ne deduce che

$$e_{k+1} = \ell e_k = \ell^2 e_{k-1} = \ell^3 e_{k-2} = \dots = \ell^{k+1} e_0$$

quindi

$$e_k = \ell^k e_0 \qquad \forall k \geq 0$$

Se voglio $|e_k| \leq \epsilon$ allora è sufficiente che

impongo

$$\ell^k |e_0| \leq \epsilon \qquad \text{da cui}$$

$$k \log \ell + \log |e_0| \leq \log \epsilon$$

da cui $k \geq \frac{\log \epsilon}{\log \ell} - \frac{\log |e_0|}{\log \ell}$

e quindi $k \geq \frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{\log \frac{1}{\ell}} + M$

Nella convergenza lineare il numero di iterazioni per raggiungere una precisione ϵ cresce come $\log \frac{1}{\epsilon}$

Nel metodo di bisezione il limite può dirsi non esistere (noi abbiamo ricavato le limiti in caso abbastanza particolari $\alpha = a$). In ogni caso lo posso garantire che

$$|c_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (b_0 - a_0)$$

e quindi se voglio precisione ϵ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k (b_0 - a_0) \leq \epsilon$$

da cui $K \geq \frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{\log 2} - \log (b_0 - a_0)$

Il numero di iterazioni cresce moderatamente con

$$\log \frac{1}{\varepsilon}$$

e questo giustifica l'attribuzione di una convergenza di tipo lineare al metodo di bisezione.

Passiamo alla convergenza quadratica $(C \neq 0)$

Nel caso ideale

$$e_{k+1} = C e_k^2 = C \cdot C^2 e_{k-1}^4 = C C^2 C^4 e_{k-2}^8$$

$$= \ldots\ldots = C^{2^{k+1}-1} e_0^{2^{k+1}}$$

$$e_k = C^{2^k-1} e_0^{2^k} \qquad k \geq 0$$

$$= \frac{C^{2^k}}{C} e_0^{2^k} = \frac{(C \cdot e_0)^{2^k}}{C}$$

Quindi se $C|e_0| < 1$ e voglio precisione ε

è sufficiente ad imporre.

$$\frac{(C|e_0|)^{2^k}}{C} \leq \epsilon$$

$$2^k \log(C|e_0|) - \log C \leq \log \epsilon$$

$$2^k \log(C|e_0|) \leq \log \epsilon + \log C$$

$$2^k \geq \frac{\log \epsilon}{\log(C|e_0|)} + \frac{\log C}{\log(C|e_0|)}$$

$$k \geq \log\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right) + M$$

quindi in una convergenza quadratica il numero di iterazioni cresce come $\log(\log \frac{1}{\epsilon})$.

Quale è l'effetto di C? Nel caso locale la convergenza quadratica (a regime) si innesta quando $C \cdot |e_0| < 1$

Quindi C può ritardare la convergenza quadratica.

(cioè richiedere un punto più vicino per iniziare) ho questa la convergenza però il numero di iterazioni richieste cresce come

$$\log\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right).$$