27/10 30
u > 11

CONVERGENZA (approfondimento)

Nello studio dei processi di CONVERGENZA quello che accade al tempo k (es $c_{k+1} - \alpha$ rispetto a $c_k - \alpha$) non ci interessa.

L'interesse è sull'evoluzione del processo a regime (al limite)

Supponiamo di considerare una convergenza lineare ideale dove

$$e_{k+1} = \ell \cdot e_k \qquad (0 < \ell < 1)$$

Se ne deduce che

$$e_{k+1} = \ell \cdot e_k = \ell^2 \cdot e_{k-1} = \dots = \ell^{k+1} \cdot e_0$$

quindi

$$e_k = \ell^k e_0 \qquad \forall k \geq 0$$

Se voglio $|e_k| \leq \varepsilon$ allora è sufficiente porre:

$$\ell^k |e_0| \leq \varepsilon \qquad \text{da cui} \qquad k \log(\ell) + \log|e_0| \leq \log \varepsilon$$

da cui
$$k \geq \frac{\log \varepsilon}{\log(\ell)} - \frac{\log|e_0|}{\log(\ell)} \qquad \text{e quindi:}$$

$$k \geq \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{1}{\ell}\right)} + M$$

- Nella convergenza lineare il # di iterazioni per raggiungere una precisione ε cresce come $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$
- Nel metodo di bisezione il limite può non esistere (noi abbiamo ricondotto il limite in un caso estremamente particolare $\alpha = a$)

In ogni caso si può garantire che

$$|c_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (b_0 - a_0)$$

e se voglio una precisione ε:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k (b_0 - a_0) \leq \varepsilon \qquad \text{da cui } k \geq \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log 2} - \log(b_0 - a_0)$$

- il # di iterazioni cresce nuovamente come $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

e questo giustifica l'attribuzione di una convergenza di tipo LINEARE al metodo di bisezione

CONVERGENZA QUADRATICA

$(c \neq 0)$

Nel caso ideale $e_{k+1} = c e_k^2 = c \cdot c^2 e_{k-1}^4 = c\left(c^2\left(e_{k-2}^2 \cdot c\right)^2\right)$

$\quad e_{k-1}^4 \to c^2 e_{k-2}^2$

$$= c \cdot c^2 \cdot c^4 \cdot e_{k-2}^8$$

$$= \dots = c^{2^{k+1}-1} e_0^{2^{k+1}}$$

- $e_k = c^{2^k-1} \cdot e_0^{2^k} \quad k \geq 0$

$$= \frac{c^{2^k}}{c} \cdot e_0^{2^k} = \frac{(c \cdot e_0)^{2k}}{c}$$

Quindi se $\underline{c \cdot |e_0| < 1}$ e voglio una precisione ϵ:

pongo: $\frac{(c|e_0|)^{2^k}}{c} \leq \epsilon$ da cui $2^k \log(c|e_0|) - \log c \leq \log \epsilon$

$$2^k \log(c|e_0|) \leq \log \epsilon + \log c$$

$$2^k \geq \frac{\log \epsilon}{\log(c|e_0|)} + \frac{\log c}{\log(c|e_0|)}$$

$$\frac{\log(\epsilon)}{\log(c|e_0|)} = -\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \cdot \frac{1}{-\log\left(\frac{1}{c|e_0|}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\log\left(\frac{1}{c|e_0|}\right)}$$

perché $\epsilon < 1$ e $c|e_0| < 1$ i 2 logaritmi ritornano valori negativi:

$$k \geq \log\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) + M$$

quindi in una convergenza quadratica il # di iterazioni cresce come

$\log\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$

Qual è l'effetto di c?

Nel caso ideale la conv. quadratica si innesca

quando $c|e_0| < 1$ quindi c può ritardare la conv. quad,

cioè, può richiedere un punto più vicino (alla soluzione) per partire) ma quando la convergenza parte il # di iterazioni richieste cresce come $\log\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$